3 PODPRIESTORY

V nasledujúcej časti zavedieme objekty, ktoré zovšeobecňujú priamky a roviny.

3.1 PODPRIESTOR – LINEÁRNA VARIETA

Definícia 3.1: ***Podpriestor*** α, alebo tiež ***lineárny podpriestor*** resp. ***lineárna varieta, afinného priestoru*** $\mathbf{A}^n$ je každá neprázdna množina $\alpha \subset \mathcal{B}$ bodov afinného priestoru $\mathbf{A}^n$, pre ktorú platí:

$$\alpha = A + S = \{A + s; s \in S\},$$

kde bod $A \in \mathcal{B}$ je bod afinného priestoru a S je ľubovoľný podpriestor vektorového priestoru $V^n(\mathbf{A}^n)$

Podpriestory afinného priestoru spravidla označujeme písmenami gréckej abecedy: α, β, γ, ...

Termín „podpriestor“ sa používa aj v súvislosti s vektorovými priestormi, pre nás však v prvom rade znamená podpriestor afinného priestoru. Ak by niekedy v súvislosti s významom slova „podpriestor“ hrozila kolízia, vtedy budeme podpriestory afinného priestoru nazývať *bodové podpriestory* a podpriestory vektorového priestoru *vektorové podpriestory*.

Definícia 3.2: *Vektorový podpriestor S* sa nazýva ***vektorová zložka*** bodového podpriestoru $A + S$ alebo tiež ***smer*** resp. ***zameranie*** podpriestoru $A + S$. Smer podpriestoru α označujeme $V(\alpha)$. Teda

$$V(A + S) = S$$

Prvky smeru podpriestoru sa nazývajú ***smerové vektory podpriestoru***.

Namiesto „smerový vektor podpriestoru“ sa niekedy hovorí „vektor rovnobežný s podpriestorom“. Stručne, i keď nie úplne presne, hovoríme tiež o „vektore podpriestoru“.

Príklad 3.1: Jednobodové podmnožiny $\{A\}$, $\{B\}$, ... a sama množina **A** sú zrejme podpriestory afinného priestoru **A**: $\{A\} = A + \{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{A} = A + V(\mathbf{A})$ pre všetky body $A \in \boldsymbol{A}$.

Uvedené podpriestory nazývame *triviálne podpriestory*, ostatné sú *netriviálne*. Triviálne podpriestory budeme z našich úvah takmer vždy vylučovať.

V geometrii býva zvykom nerozlišovať medzi bodom a odpovedajúcim jednoprvkovým podpriestorom. Napríklad, ak bod A je jediným spoločným bodom podpriestorov α a β, tak namiesto množinovo správneho zápisu $\alpha \cap \beta = \{A\}$ zjednodušene píšeme $\alpha \cap \beta = A$.

Príklad 3.2: Priamka určená začiatkom sústavy súradníc a jedným zo súradnicových vektorov sa nazýva *súradnicová os*. Podľa poradia súradnicových vektorov hovoríme tiež o prvej, druhej, ..., n-tej súradnicovej osi alebo tiež o osi $x_1, x_2, ..., x_n$. V dvojrozmernom a trojrozmernom priestore hovoríme tiež o osiach x, y resp. x, y, z, ktoré sa tradične označujú aj symbolmi Ox, Oy resp. Ox, Oy, Oz. V trojrozmernom priestore hovoríme tiež o *súradnicových rovinách* Oxy, Oyz, Oxz, ktoré sú určené začiatkom sústavy súradníc a dvomi súradnicovými vektormi.

Nasledujúca veta objasňuje zmysel slova „podpriestor“:

Veta 3.1: Podpriestor afinného priestoru, spolu so svojím smerom a s rozdielom bodov prevzatým z celého priestoru, je afinný priestor. ☑

Veta 3.2: Základné vlastnosti podpriestorov:

a) $A \in A + S$, preto každý podpriestor je neprázdny.

b) $\forall X \in \boldsymbol{A}$: $X \in A + S \Leftrightarrow X - A \in S$.

c) $B \in A + S \Rightarrow B + S = A + S$.

d) $V(\alpha) = \{Y - A;\ Y \in \alpha\}$, pričom $A \in \alpha$ je ľubovoľný.

e) $V(\alpha) = \{Y - X;\ X,Y \in \alpha\}$.

f) Súčet bodu podpriestoru so smerovým vektorom podpriestoru je bod podpriestoru: $X \in \alpha$, $\mathbf{u} \in V(\alpha) \Rightarrow X + \mathbf{u} \in \alpha$.

g) $\alpha = A + V(\alpha)$, kde $A \in \alpha$ je ľubovoľný bod.

Dôkaz všetkých tvrdení vety je ľahký. ☑

Keby sme dokazovali na základe definície 3.1, že nejaká množina bodov $\alpha \subset \boldsymbol{A}$ je podpriestor, museli by sme najprv dokázať, že množina $V(\alpha) = \{Y - X;\ X,Y \in \alpha\}$ je podpriestor vektorového priestoru $V(\boldsymbol{A})$, a že $\alpha = A + V(\alpha)$, kde $A \in \alpha$ je ľubovoľne zvolený bod. Namiesto takéhoto zdĺhavého postupu môžeme takmer vždy využiť nasledujúcu vetu, ktorá sa dokazuje v základnom kurze lineárnej algebry a geometrie:

Veta 3.3: Množina $\alpha \subset \mathbf{A}$ je podpriestor práve vtedy, keď je neprázdna a má vlastnosť

$$\forall A,B \in \alpha\ \forall t \in \mathbb{R}:\ A + t(B - A) \in \alpha.$$ ☑

3.2 DIMENZIA LINEÁRNEHO PODPRIESTORU

Definícia 3.3: ***Dimenzia*** (alebo tiež ***rozmer***) ***podpriestoru*** $\boldsymbol{\alpha}$ je dimenzia jeho vektorovej zložky $V(\alpha)$: $\dim \alpha = \dim V(\alpha)$.

Hovoríme, že lineárny podpriestor α je k-rozmerný (má dimenziu k) ak vektorový podpriestor $V(\alpha)$ má dimenziu k: $\dim V(\alpha) = k$.

Priamka je *jednorozmený lineárny podpriestor* afinného priestoru $\mathbf{A}^n$, ***rovina*** je *dvojrozmerný* (ak existuje) *lineárny podpriestor* $\mathbf{A}^n$. Zavedieme aj pojem ***nadrovina***, ktorým budeme nazývať $(n-1)$-*rozmerný lineárny podpriestor* n-rozmerného afinného priestoru $\mathbf{A}^n$.

Teda platí:

$$\begin{aligned} &\textit{priamka}: && \alpha : \dim \alpha = 1 \\ &\textit{rovina}: && \alpha : \dim \alpha = 2 \\ &\vdots \\ &\textit{nadrovina}: && \alpha : \dim \alpha = n-1 \end{aligned}$$

Spoločný názov „*nadrovina*“ sme zaviedli preto, lebo spomenuté podpriestory majú niektoré významné vlastnosti rovnaké. Zrejme priamka je zároveň nadrovinou v priestore $\mathbf{A}^2$ a rovina je nadrovinou v priestore $\mathbf{A}^3$.

Priamky označujeme spravidla písmenami latinskej abecedy: a, b, ..., ***roviny*** písmenami gréckej abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \ldots$.

3.3 LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A LINEÁRNA NEZÁVISLOSŤ BODOV

Definícia 3.4: Hovoríme, že body $A_0, A_1, \ldots, A_k$ sú ***lineárne závislé*** ak existuje podpriestor α, pre ktorý platí, že body $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \alpha$ a $\dim \alpha < k$. Body $A_0, A_1, \ldots, A_k$ sú ***lineárne nezávislé***, práve vtedy ak nie sú lineárne závislé.

Poznámka: z uvedenej definície vyplýva, že tri body sú lineárne závislé ak ležia na jednej priamke (takéto body nazývame ***kolineárne***), štyri body ak ležia v rovine (body nazývame ***komplanárne***), atď.

Veta 3.4: (*Kritérium*) Body $A_0, A_1, \ldots, A_k$ sú lineárne závislé práve vtedy, ak sú vektory $A_1 - A_0, \ldots, A_k - A_0$ lineárne závislé.

Dôkaz: Platí, že body $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \alpha$ práve vtedy ak podpriestor $\beta = A_0 + [A_1 - A_0, \ldots, A_k - A_0] \subset \alpha$

➡: Body $A_0, A_1, ..., A_k$ sú lineárne závislé $\Rightarrow \exists \alpha : A_0, A_1, ..., A_k \in \alpha \wedge \dim \alpha < k \quad \Rightarrow \dim \beta < k$ $\Rightarrow \dim\left[A_1 - A_0, ..., A_k - A_0\right] < k \Rightarrow \left\{A_1 - A_0, ..., A_k - A_0\right\}$ sú lineárne závislé.

⬅: $\left\{A_1 - A_0, ..., A_k - A_0\right\}$ sú lineárne závislé $\Rightarrow \dim\left[A_1 - A_0, ..., A_k - A_0\right] < k \Rightarrow \dim \beta < k \Rightarrow A_0, A_1, ..., A_k$ sú lineárne závislé. ☑

Vlastnosti:

1°: dim α = k ⇔ keď v α existuje k+1 lineárne nezávislých bodov a viac bodov ako k+1 je lineárne závislých.

2°: V n-rozmernom afinnom priestore $\mathbf{A}^n$ existuje n+1 lineárne nezávislých bodov a každá množina, ktorá obsahuje viac bodov je lineárne závislá

3°: $\left(\alpha, V\left(\alpha\right), +\right)$ je k-rozmerný afinný priestor, ak dim α = k

4°: Ak $A_0, A_1, ..., A_k$ sú lineárne nezávislé potom existuje práve jeden k-rozmerný podpriestor, ktorý obsahuje dané body.

Poznámka: Vlastnosť 4° sa využíva na zadávanie podpriestorov.

3.4 PARAMETRICKÉ URČOVANIE PODPRIESTORU

Nasledujúce úvahy budeme robiť v priestore $\mathbf{A}^n$, v ktorom je pevne zvolená afinná súradnicová sústava $\left\langle O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \right\rangle$. Súradnice všetkých bodov a vektorov sa budú zavádzať v nej.

Vektorový podpriestor $V(\alpha)$ generovaný vektormi $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_k$ označujeme $V(\alpha)=\langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$ alebo tiež $V(\alpha)=\langle \mathbf{a}_1...\mathbf{a}_k\rangle$. O podpriestore $\alpha = A + \left\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \right\rangle$ vieme, že je *úplne určený bodom* A ($A = \left[a_{10}, a_{20}, ..., a_{n0}\right] \in \mathcal{B}$) a lineárne nezávislými *vektormi* $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_k$ ($\mathbf{a}_1 = \left[a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}\right], \mathbf{a}_2 = \left[a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2}\right], ..., \mathbf{a}_k = \left[a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{nk}\right]$), ktoré sú bázou vektorového podpriestoru $V(\alpha)$. Takto určený podpriestor zapisujeme symbolom $\alpha = \langle A, \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$ alebo skrátene $\alpha = \langle A\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_k\rangle$.

Veta 3.5: Všeobecný bod $X = \left[x_1, x_2, ..., x_n\right] \in \boldsymbol{A}^n$ leží v podpriestore $\alpha = A + \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$ práve vtedy, keď existujú také čísla t_1, ..., $t_k \in \mathbf{R}$, že:

$$X = A + t_1\mathbf{a}_1 + ... + t_k\mathbf{a}_k \,. \tag{3.1}$$

Dôkaz: Vieme, že k-rozmerný vektorový podpriestor $V(\alpha)= \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$ pozostáva zo všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_k$, preto bod $X \in \alpha$ práve vtedy, keď vektor $X - A \in V\left(\alpha\right)$ a to je vtedy, ak je lineárnou kombináciou vektorov $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_k$. Teda existujú také reálne čísla t_1, ..., $t_k \in \mathbf{R}$, že $X - A = t_1\mathbf{a}_1 + ... + t_k\mathbf{a}_k$, čo je práve vtedy keď platí rovnosť (3.1) ☑

Definícia 3.5: Rovnosť (3.1) sa nazýva ***parametrické vyjadrenie podpriestoru*** $\alpha = A + \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$. Tradične sa používa nie úplne presný názov *parametrické rovnice podpriestoru*. Čísla t_1, ..., t_k z rovnosti (3.1) sa nazývajú ***parametre bodu*** $\boldsymbol{X} \in A + \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\rangle$. V súradniciach majú parametrické rovnice podpriestoru známy tvar

$$\begin{array}{cccc} x_1 = & a_{10} + & a_{11}t_1 + & ... + a_{1k}t_k \\ x_2 = & a_{20} + & a_{21}t_1 + & ... + a_{2k}t_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n = & a_{n0} + & a_{n1}t_1 + & ... + a_{nk}t_k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X & A & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n \end{array} \tag{3.2}$$

kde $A = (a_{10},..., a_{n0})$, $\mathbf{a}_1 = (a_{11},..., a_{n1})$, ..., $\mathbf{a}_k = (a_{1k},..., a_{nk})$.

Parametrické vyjadrenie smeru podpriestoru $A + \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k \rangle$ je

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + ... + t_k\mathbf{a}_k, \quad t_1, ..., t_k \in \mathbf{R}.$$

Ak sú vektory $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ lineárne nezávislé, tak $\dim(A + \langle \mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k \rangle) = k$.

Vyjadrenie (3.2) môžeme zapísať ako súčin matíc nasledovne:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Definícia 3.6: Maticu $\left[a_{ij}\right]_{i=1,...,n;\, j=1,...,k}$ z predchádzajúceho vyjadrenia (3.3) nazývame ***matica prechodu*** od afinnej súradnicovej sústavy $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n \rangle$ do sústavy $\langle A, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \rangle$.

Poznámka: Parametrické vyjadrenie lineárneho podpriestoru α nie je určené jednoznačne, lebo závisí od voľby bodu v podpriestore α a od voľby bázy vo $V(\alpha)$.

Príklad 3.3: Zistite, či body M=(9,–2,5),N=(4,1,6) ležia v rovine $\langle A\mathbf{ab} \rangle$, ak A=(1,3,2),$\mathbf{a}$=(2,–1,1),$\mathbf{b}$=(1,–1,0).

Riešenie: Podľa predchádzajúceho bod M leží v podpriestore $\langle A\mathbf{ab} \rangle$ práve vtedy, keď existuje riešenie sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 2r + s \\ -2 &= 3 - r - s \\ 5 &= 2 + r \end{aligned}$$

Táto sústava riešenie má (a to $r = 3$, $s = 2$), preto $M \in \langle A\mathbf{ab} \rangle$.

Napíšte odpovedajúcu sústavu rovníc pre bod N a presvedčte sa, že nemá riešenie. Takto zistíte, že $N \notin \langle A\mathbf{ab} \rangle$.

Poznámka: Počet lineárnych funkcií v parametrickom vyjadrení lineárneho podpriestoru α sa rovná dimenzii afinného priestoru (pre $\boldsymbol{A}^n$ je to n lineárnych funkcí $x_1, x_2, ..., x_n$) v ktorom tento lineárny podpriestor skúmame a počet rôznych parametrov vyskytujúcich sa v týchto funkciách (každý aspoň v jednej) sa rovná dimenzii lineárneho podpriestoru α(ak $\dim \alpha = k$, tak existujú parametre $t_1, ..., t_k$).

Príklad 3.4: Zistite, aké podpriestory sú dané parametrickými rovnicami:

a) $\begin{aligned} x_1 &= 2 + 3t \\ x_2 &= -1 + 2t \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 1 - t \\ x_3 &= 3 + 2t \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 &= 5 - r + 2s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= r + s \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 &= 1 + r + 3s + t \\ x_2 &= 2 - r + 2s + t \\ x_3 &= -3 + r + 2s + t \\ x_4 &= 1 + r + s \end{aligned}$

Riešenie:

a) Daný podpriestor je *priamka* v $\mathbf{A}^2$, ktorá prechádza bodom A=(2,–1) a má smerový vektor $\mathbf{v}$=(3,2).

b) Daný podpriestor je tiež *priamka*, ale v $\mathbf{A}^3$. Prechádza bodom A=(0,1,3) a má smerový vektor $\mathbf{v}$=(1,1,2).

c) Parametrické rovnice sú vyjadrením *roviny* v $\mathbf{A}^3$ určenej bodom A=(5,3,0) a smerovými vektormi $\mathbf{u}$=(–1,2,1) a $\mathbf{v}$=(2,1,1).

d) Sústava parametrických rovníc vyjadruje *nadrovinu* v $\mathbf{A}^4$, ktorá je určená bodom $A = (1, 2, -3, 1)$ a smerovými vektormi $\mathbf{u} = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 2, 1)$ a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 0)$.

Zovšeobecnením predchádzajúceho príkladu dostaneme parametrické vyjadrenia špeciálnych typov lineárnych podpriestorov:

	Podpriestor *n*-rozmeného afinného priestoru $\mathbf{A}^n$		
	Priamka p (dim $p = k = 1$)	**Rovina** α (dim $\alpha = k = 2$)	**Nadrovina** π (dim $\pi = k = n$-1)
Určujúce prvky	Bod: $P = \left[x_i^0\right]_{i=1,\dots,n}$ Smerový vektor: $\mathbf{a} = \left[a_i\right]_{i=1,\dots,n}$	Bod: $P = \left[x_i^0\right]_{i=1,\dots,n}$ Smerové vektory: $\mathbf{a} = \left[a_i\right]_{i=1,\dots,n}$ a $\mathbf{b} = \left[b_i\right]_{i=1,\dots,n}$	Bod: $P = \left[x_i^0\right]_{i=1,\dots,n}$ Smerové vektory: $\mathbf{a}_1 = \left[a_{i,1}\right]_{i=1,\dots,n}, \dots, \mathbf{a}_{n-1} = \left[a_{i,n-1}\right]_{i=1,\dots,n}$
Parametrické vyjadrenie	$x_1 = x_1^0 + a_1 t$ $x_2 = x_2^0 + a_2 t$ $\vdots$ $x_n = x_n^0 + a_n t$	$x_1 = x_1^0 + a_1 u + b_1 v$ $x_2 = x_2^0 + a_2 u + b_2 v$ $\vdots$ $x_n = x_n^0 + a_n u + b_n v$	$x_1 = x_1^0 + a_{1,1} t_1 + \dots + a_{1,n-1} t_{n-1}$ $x_2 = x_2^0 + a_{2,1} t_1 + \dots + a_{2,n-1} t_{n-1}$ $\vdots$ $x_n = x_n^0 + a_{n,1} t_1 + \dots + a_{n,n-1} t_{n-1}$

Ešte špeciálnejšie parametrické vyjadrenia:

	Priamka v $\mathbf{A}^2$	**Priamka v $\mathbf{A}^3$**	**Rovina v $\mathbf{A}^3$**
Určujúce prvky	Bod: $P = \left[x_1^0, x_2^0\right]$ Smerový vektor: $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2\right]$	Bod: $P = \left[x_1^0, x_2^0, x_3^0\right]$ Smerový vektor: $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, a_3\right]$	Bod $P = \left[x_1^0, x_2^0, x_3^0\right]$ Smerové vektory: $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, a_3\right]$ a $\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, b_3\right]$
Parametrické vyjadrenie	$x_1 = x_1^0 + a_1 t$ $x_2 = x_2^0 + a_2 t$	$x_1 = x_1^0 + a_1 t$ $x_2 = x_2^0 + a_2 t$ $x_3 = x_3^0 + a_3 t$	$x_1 = x_1^0 + a_1 u + b_1 v$ $x_2 = x_2^0 + a_2 u + b_2 v$ $x_3 = x_3^0 + a_3 u + b_3 v$

Poznámka: Ak je podpriestor α určený iným spôsobom, ako sme uviedli v predchádzajúcom texte, je potrebné si jeho zadanie najskôr na tento tvar upraviť. Čiže, ak je podpriestor α určený svojimi lineárne nezávislými bodmi $A_0 = \left[a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0}\right]$, $A_1 = \left[a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}\right]$, …, $A_k = \left[a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}\right]$, bude mať jeho parametrické vyjadrenie tvar:

$$\begin{array}{llll} x_1 = & a_{10} + & (a_{11} - a_{10})t_1 + & \dots + (a_{1k} - a_{10})t_k \\ x_2 = & a_{20} + & (a_{21} - a_{20})t_1 + & \dots + (a_{2k} - a_{20})t_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n = & a_{n0} + & (a_{n1} - a_{n0})t_1 + & \dots + (a_{nk} - a_{n0})t_k \end{array},$$

lebo vektory:

$$\begin{array}{l} A_1 - A_0 = \left[a_{11} - a_{10}, \dots, a_{n1} - a_{n0}\right] \\ A_2 - A_0 = \left[a_{12} - a_{10}, \dots, a_{n2} - a_{n0}\right] \\ \vdots \\ A_k - A_0 = \left[a_{1k} - a_{10}, \dots, a_{nk} - a_{n0}\right] \end{array},$$

sú jeho smerové vektory.

3.5 NEPARAMETRICKÉ URČOVANIE PODPRIESTORU

Okrem parametrického vyjadrenia sa lineárne podpriestory zadávajú aj *neparametricky – sústavami všeobecných rovníc*. Ich počet je závislý nielen od dimenzie podpriestoru, ale aj od priestoru v ktorom ich skúmame. Tento počet je daný vzťahom $p = n - k$.

V stredoškolskej analytickej geometrii ste sa dozvedeli, že v rovine ($n = 2$) bola priamka ($k = 1$) vyjadrená jedinou lineárnou rovnicou s dvoma neznámymi a na určenie bodu ($k = 0$) boli potrebné dve nezávislé rovnice – teda bod bol vyjadrený ako prienik dvoch priamok. V priestore ($n = 3$) bola jedinou lineárnou rovnicou, ale už s troma neznámymi, vyjadrená rovina ($k = 2$). Na určenie priamky boli potrebné dve nezávislé lineárne rovnice – teda priamka bola vyjadrená ako prienik dvoch rovín a na určenie bodu boli potrebné tri rovnice (prienik troch rovín).

Definícia 3.7: ***Sústavou všeobecných rovníc*** *k*-rozmerného lineárneho podpriestoru α z priestoru $\mathbf{A}^n$ budeme rozumieť každú nezávislú sústavu *n-k* lineárnych rovníc o *n* neznámych, čiže sústavu rovníc v tvare:

$$\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 & + & a_{n-k,2}x_2 & + & & + & a_{n-k,n}x_n & = b_{n-k} \end{array} \qquad (3.4)$$

pričom hodnosť matice $A = \left[a_{ij}\right]_{i=1,\dots,n-k;\, j=1,\dots,n}$ je $h(\mathbf{A}) = n - k$, a ktorej vyhovujú súradnice všetkých bodov podpriestoru α a nevyhovujú jej súradnice žiadnych iných bodov.

Teda rovnice (3.4) predstavujú nutné a postačujúce podmienky k tomu aby bod $X = \left[x_1, x_2, \dots, x_n\right]$ patril podpriestoru α.

Maticový zápis neparametrického vyjadrenia: **A.X = P**

Veta 3.6: *Množina všetkých bodov* afinného priestoru $\boldsymbol{A}^n$, ktorých súradnice vyhovujú riešiteľnej *nehomogénnej sústave* lineárnych rovníc (3.4) je podpriestor. Jeho *smerom* je množina všetkých vektorov, ktorých súradnice vyhovujú odpovedajúcej sústave *homogénnych rovníc*.

Dôkaz: Množinu všetkých bodov, ktorých súradnice vyhovujú sústave rovníc (3.4), označme α a množinu všetkých vektorov, ktorých súradnice vyhovujú odpovedajúcej sústave homogénnych rovníc, označme *S*. Nech $A \in \alpha$ je ľubovoľný bod. Z algebry je známe, že množina všetkých riešení homogonnej sústavy rovníc je podpriestor vektorového priestoru $\mathbf{R}^n$ a všetky riešenia sústavy (3.4) sa dajú získať ako súčet jedného riešenia sústavy (3.4) so všetkými riešeniami odpovedajúcej homogénnej sústavy. Pomocou základnej vety o súradniciach (**Veta 2.3**) to môžeme vyjadriť takto: *S* je podpriestor vektorovej zložky afinného priestoru a $\alpha = A + S$. ☑

Podpriestor určený sústavou rovníc (3.4) označujeme ⟨3.4⟩. Teda

- **bod** afinného priestoru patrí podpriestoru ⟨3.4⟩ práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc (3.4), resp. v maticovom zápise **A.X = P**
- **vektor** afinného priestoru je smerovým vektorom podpriestoru ⟨3.4⟩ práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú sústave homogénnych rovníc, ktorá vznikne zo sústavy (3.4), resp. **A.X = 0**

Uvedomme si, že podpriestor neurčuje samotná sústava rovníc, ale sústava rovníc spolu s aktuálnou sústavou súradníc.

Veta 3.7: Ku každému *k*-rozmernému podpriestoru existuje aspoň jedna sústava všeobecných lineárnych rovníc, ktorá ho určuje. ☑

Osobitnú pozornosť venujme nadrovinám. Z **Veta 3.6** a **Veta 3.7** vyplýva:

a) Každá lineárna rovnica:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b_1; (a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$$

je všeobecnou rovnicou jedinej nadroviny α priestoru $\mathbf{A}^n$. Do nadroviny patria tie a len tie body, ktorých súradnice vyhovujú tejto rovnici a smerovými vektormi sú tie a len tie vektory, ktoré vyhovujú rovnici $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$.

b) Každá nadrovina má aspoň jednu všeobecnú rovnicu. Teda existuje rovnica

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b_1,$$

ktorá je jej všeobecnou rovnicou.

Všeobecná rovnica $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b_1$ predstavuje nutnú a postačujúcu podmienku k tomu, aby bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ patril do α.

Príklad 3.5: Nájdite všeobecnú rovnicu nadroviny α určenej $\alpha = P + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{n-1} \rangle$.

Riešenie: Bod $X = [x_1, x_2, ..., x_n] \in \alpha \Leftrightarrow X - P \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{n-1}] \subset V_\alpha \Leftrightarrow \{X - P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{n-1}\}$ je LZ ⇔

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \cdots & x_n - p_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

Vyjadrenie (3.5) je nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby bod $X \in \alpha$, čiže je to všeobecná rovnica nadroviny.

Dôsledok: Priamka $p = P + \langle \mathbf{a} \rangle$ z $\mathbf{A}^2$, kde $P = [p_1, p_2]$ a $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ má všeobecnú rovnicu:

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

čo vieme upraviť na tvar:

$$a_2(x_1 - p_1) - a_1(x_2 - p_2) = 0$$

Poznámka: Ak je priamka určená ináč, je potrebné pred napísaním jej rovnice nájsť jeden jej bod a smerový vektor.

Príklad 3.6: Určime rovnicu priamky $\overleftrightarrow{AB}$, ak $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2] \neq A$

Riešenie: $\overleftrightarrow{AB} = A + [B - A] \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0$.

Konkrétne: Ak $A = [1, -2], B = [3, 1]$

$$\overleftrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 + 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} \equiv 3(x_1 - 1) - 2(x_2 - 2) = 0 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \equiv 3x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

Dôsledok 2. Rovnica roviny (nadroviny) $\alpha = P + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ priestoru $\mathbf{A}^3$ kde, bod $P = [p_1, p_2, p_3]$ a vektory $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ je

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_3 - p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Poznámka: Vektory **a,b** musia byť lineárne nezávislé.

Ak máme určiť rovnicu roviny, ktorá je určená iným spôsobom, je potrebné pred napísaním jej rovnice najskôr nájsť jeden jej bod a dva lineárne nezávislé smerové vektory

3.6 PREPIS PARAMETRICKÉHO VYJADRENIA NA VŠEOBECNÉ ROVNICE A NAOPAK

Veta 3.8: Ku každému podpriestoru zadanému parametricky je možné napísať sústavu lineárnych rovníc, ktorá ho určuje a naopak, každý podpriestor určený sústavou lineárnych rovníc je možné vyjadriť parametricky.

Najprv uvedieme niekoľko konkrétnych postupov, resp. návodov na určenie všeobecných rovníc podpriestoru daného parametricky.

1. postup: Nech je daný podpriestor $\alpha = P + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n \rangle$.

a) Vytvoríme sústavu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

b) Nájdeme bázu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_{n-k}$ podpriestoru všetkých riešení sústavy (3.6).

c) Vytvoríme sústavu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \text{ resp. } \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

čo je už hľadaná sústava všeobecných rovníc.

2. postup: Ak sa pozrieme na sústavu všeobecných rovníc (3.4), zistíme, že je to systém všeobecných rovníc *n-k* nadrovín, ktorých prienikom je *k*-rozmerný lineárny podpriestor α. Nájsť sústavu všeobecných rovníc *k*-rozmerného podpriestoru α teda znamená nájsť *n-k* „lineárne nezávislých“ nadrovín, ktorých prienikom je α a pod seba napísať ich všeobecné rovnice.

Pre *k*-rozmerný lineárny podpriestor $\alpha = P + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \rangle$ je algoritmus riešenia nasledujúci:

a) Doplníme množinu $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ nejakými vektormi $\mathbf{a}_{k+1}, ..., \mathbf{a}_n$ na bázu priestoru $V^n(P)$ (teda vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ budú lineárne nezávislé).

b) Vytvoríme si nadroviny $\alpha_{k+1} = P + \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a_k}, \mathbf{a_{k+2}}, ..., \mathbf{a}_n \rangle$, $\alpha_{k+2} = P + \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a_{k+1}}, \mathbf{a_{k+3}}, ..., \mathbf{a}_n \rangle$, …, $\alpha_n = P + \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a_k}, \mathbf{a_{k+1}}, ..., \mathbf{a_{n-1}} \rangle$, t.j. z *n-k* pridaných vektorov vždy jeden vynecháme.

c) Napíšeme všeobecné rovnice nadrovín $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ na základe skôr uvedeného vzorca (3.5)

d) Systéme týchto *n-k* lineárnych rovníc vytvára sústavu všeobecných rovníc lineárneho podpriestoru α.

Príklad 3.7: Určte rovnice roviny $\alpha = P + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, kde $P = [-1, 0, 0, 0], \mathbf{a}_1 = [1, 1, 1, 1], \mathbf{a}_2 = [1, 1, 1, 0]$

Riešenie: Zostrojíme vektory $\mathbf{a}_3 = [1,1,0,0], \mathbf{a}_4 = [1,0,0,0]$ a utvoríme nadroviny $\beta = P + [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ a $\gamma = P + [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$.

$$\beta : \alpha_3 = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \gamma : \alpha_4 = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Teda pre nadroviny β a γ platí:

$$\alpha_3 : \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1+1 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left[(x_4+x_3)-(x_4+x_2)\right] - \left[(x_4+x_3)-(x_4+x_1+1)\right] =$$

$$= x_3 - x_2 - x_3 + x_1 + 1 = x_1 - x_2 + 1$$

$$\alpha_4 : \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left[(x_4+x_3)-(x_4+x_2)\right] = -x_2 + x_3$$

Prienikom týchto nadrovín je hľadaná rovina α , ktorej všeobecné rovnice majú tvar:

$$\alpha : x_1 - x_2 + 1 = 0$$
$$-x_2 + x_3 = 0$$

3. postup: Použitím eliminačnej metódy parametrov. Nech (3.2) je parametrické vyjadrenie *k*-rozmerného podpriestoru α. Stĺpcové vektory pri parametroch $t_1, t_2, ..., t_k$ vytvárajú obdĺžnikovú maticu typu $n \times k$. Pretože hodnosť tejto matice je *k*, obsahuje aspoň jednu *k*–ticu lineárne nezávislých riadkov. Vyberme si jednu z týchto *k*-tíc. Tejto *k*-tici prislúcha *k*-členná podsústava sústavy (3.2). Z tejto podsústavy možno vyjadriť parametre $t_1, t_2, ..., t_k$ ako funkcie príslušných neznámych $x_1, x_2, ..., x_n$. Ak tieto vyjadrenia dosadíme do zvyšných rovností sústavy (3.2), dostaneme po úprave sústavu všeobecných rovníc lineárneho podpriestoru α.

Príklad 3.8: Napíšte všeobecné rovnice podpriestoru α daného parametrickým vyjadrením:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + r - s \\ x_2 &= r + 2s \\ x_3 &= 2 + 2r + s \\ x_4 &= 1 + s \end{aligned} \tag{3.7}$$

Riešenie: Najprv zo štvrtej rovnice sústavy (3.7) vyjadríme parameter *s*: $s = x_4 - 1$. Toto vyjadrenie dosadíme do niektorej z ďalších rovníc, napr. do druhej. Z tejto rovnice následne vyjadríme parameter *r*: $x_2 = r - 2(x_4 - 1) \Rightarrow r = 2 + x_2 - x_4$. Nakoniec tieto vyjadrenia dosadíme do zvyšných dvoch rovníc a dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru α (roviny v $\mathbf{A}^4$):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + (x_2 - 2x_4 + 2) - (x_4 - 1) \\ x_3 &= 2 + 2(x_2 - 2x_4 + 2) + (x_4 - 1) \\ \hline 0 &= 4 - x_1 + x_2 - 3x_4 \\ 0 &= 5 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \end{aligned}$$

Teraz uvedieme postup na zistenie parametrických rovníc *k*-rozmerného lineárneho podpriestoru α daného všeobecnými rovnicami.

Nech

$$\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 & + & a_{n-k,2}x_2 & + & & + & a_{n-k,n}x_n & = b_{n-k} \end{array}, \qquad (3.8)$$

je sústava všeobecných rovníc *k*-rozmerného lineárneho podpriestoru α. Pretože pre maticu $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=1,\dots,k;\, j=1,\dots,n}$ sústavy (3.8) platí, že hodnosť $h(\mathbf{A}) = n-k$, obsahuje táto sústava *n-k* lineárne nezávislých stĺpcov, ktoré vytvoria regulárnu submaticu **B** typu $(n-k)\times(n-k)$ matice **A**. Potom pri hľadaní parametrického vyjadrenia podpriestoru α možno postupovať takto:

a) sústavu (3.8) upravíme tak, že na ľavej strane ponecháme iba tie neznáme, ktoré prislúchajú stĺpcom matice B a zvyšné neznáme (je ich k) položíme rovné parametrom $t_1,\dots,t_k$ a prenesieme ich na pravú stranu.

b) Takto upravenú sústavu vyriešime vzhľadom na neznáme, ktoré zostali na pravej strane, čiže vypočítame ich ako funkcie parametrov $t_1,\dots,t_k$.

c) Výsledky usporiadame podľa indexov neznámych.

Príklad 3.9: Napíšte parametrické vyjadrenie podpriestoru α v $\mathbf{A}^4$, ktorý je daný všeobecnými rovnicami:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 5 = 0$$
$$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 7 = 0$$

Riešenie: Rozšírená matica sústavy je riadkovo ekvivalentná s maticou

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 6 & -3 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Druhému riadku redukovanej matice odpovedá rovnica $x_3 - 2x_4 - 1 = 0$, z ktorej vyjadríme jednu neznámu, napr. $x_3 = 1 + 2x_4 = 1 + 2s$, kde $x_4 = s$ je jeden parameter. Prvému riadku redukovanej matice odpovedá prvá rovnica pôvodnej sústavy. Dosadíme do nej $x_3 = 1 + 2s$, $x_4 = s$ a po úprave a voľbe druhého parametra $x_1 = r$ dostaneme: $x_2 = 2x_1 + 3x_3 - 7x_4 - 5 = -2 + 2r - s$. Tým sme získali parametrické vyjadrenie podpriestoru α:

$$x_1 = r$$
$$x_2 = -2 + 2r - s$$
$$x_3 = 1 + 2s$$
$$x_4 = s$$

3.6.1 Ďalšie analytické opisy priamky a nadroviny

Ak je *priamka* určená parametricky: $\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{a}$, tak pre parameter *t* potom platí:

$$t = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{P}}{\mathbf{a}}.$$

Ďalej, nech bod $P = \left[p_1,\dots,p_n\right]$ a vektor $\mathbf{a} = \left[a_1,\dots,a_n\right]; a_i \neq 0$. Potom pre každú zo súradníc x_i bodu *X* priamky *p* a parameter *t* platí: $x_i = p_i + a_i t \Rightarrow \dfrac{x_i - p_i}{a_i} = t; \forall i$ a vyjadrenie

$$\frac{x_1 - p_1}{a_1} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{a_n}$$

nazývame ***kanonickými rovnicami priamky p***.

Ak je *nadrovina* α určená bodmi $A_1 = (a_1, 0, \ldots, 0)$, $A_2 = (0, a_2, \ldots, 0)$, $A_n = (0, 0, \ldots, a_n)$, kde všetky $a_i \neq 0$, čo sú priesečníky nadroviny so súradnicovými osami, tak hovoríme o ***úsekovom tvare*** všeobecnej rovnice nadroviny, ktorá má tvar:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} - 1 = 0$$

3.7 ÚLOHY

3.7.1 Lineárne podpriestory

1. Zistite, či je zjednotenie podpriestorov afinného priestoru podpriestor.

Návod: Stačí vziať dve rôznobežky/rovnobežky/ a ďalej použiť definíciu lineárneho podpriestoru.

Výsledok: Nie je podpriestor

2. Zistite, či množina α v A^2 je podpriestor, ak:

a) $\alpha = \{X = (x, y);\ x = 3\}$, ***Výsledok***: Je podpriestor /priamka v rovine/.

b) $\alpha = \{X = (x, y);\ |x| = 3\}$. ***Výsledok***: Nie je podpriestor /ako v 3.7.1.1./.

3. Zistite, či bod M leží v podpriestore $A + V(\alpha)$, kde $A = (2,2,1)$, $V(\alpha) = [(1,2,1), (1,3,0)]$:

a) $M = (6,30,13)$, ***Výsledok***: Neleží.
b) $M = (7,17,8)$, ***Výsledok***: Neleží.
c) $M = (12,32,15)$. ***Výsledok***: Neleží.

4. Dokážte, že v štvorrozmernom afinnom priestore rozšírených súradníc nad **R** je

a) množina $p = \{(0, y, 0, 0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$ priamkou,

b) množina $\alpha = \{(0, 0, z, t, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ rovinou,

c) množina $\beta = \{(x, y, 0, t, 1) \mid x, y, t \in \mathbb{R}\}$ nadrovinou.

5. *Daný je podpriestor α a bod P. Je množina $\alpha' = s_P(\alpha) = \{s_P(X);\ X \in \alpha\}$, kde s_P je stredová súmernosť so stredom v bode P, lineárny podpriestor? Ak áno, určite jeho smer a dimenziu.

6. *Daný je podpriestor α a bod M. Je množina $\alpha' = \{S(M, X);\ X \in \alpha\}$ podpriestor? Ak áno, určite jeho smer a dimenziu.

7. *Dokážte, že pre podpriestory α a β platí:

a) ak $\alpha \subset \beta$, tak $V_\alpha \subset V_\beta$,

b) ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $V_\alpha \subset V_\beta$, tak $\alpha \subset \beta$,

c) ak $\alpha \subset \beta$ a $\dim \alpha = \dim \beta$, tak $\alpha = \beta$.

8. *Pre podpriestor $\alpha \subset \boldsymbol{A}$ a pre vektorový podpriestor $U \subset V(\boldsymbol{A})$ definujme $\alpha + U = \{X + \mathbf{u}\ ;\ X \in \alpha,\ \mathbf{u} \in U\}$

Dokážte:

a) $\alpha + U$ je podpriestor

b) $\alpha \subset \alpha + U$

c) $U \subset V(\alpha + U)$

d) $\alpha + U = A + [V(\alpha) + U]$ pre ľubovoľný bod $A \in \alpha$.

3.7.2 Parametrické a všeobecné vyjadrenie podpriestorov afinného priestoru

9. Dokážte, že množina $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x + y - 2z = 5,\ \ x - y = 1\}$ je priamkou v afinnom priestore z úlohy 2.6.1. *Návod:* Stačí nájsť bázu riešení sústavy rovníc $x + y - 2z = 0,\ \ x - y = 0$

10. Zistite, či možno nájsť také reálne čísla a, b, aby vektory **u**, **v** určili bázu v smere roviny $\alpha: 2x - 3y + 4z - 7 = 0$, ak:

a) $\mathbf{u} = (a - 1, a + b, -b)$, $\mathbf{v} = (-a, a - b, 2 + a)$, *Výsledok*: $a = 5$, $b = -1$

b) $\mathbf{u} = (a + b, a - b, b)$, $\mathbf{v} = (a, b, a - b)$. *Výsledok*: $a = 0$, $b = 0$ – teda neexistujú

Návod: Dosaďte súradnice vektorov do vyjadrenia roviny /bez abs. člena/ a vypočítajte a,b. Potom treba ešte overiť či dané vektory určia bázu (sú *LN*).

11. Na priamke p: $x=3+3t$, $y=2+t$, $z=2-2t$ nájdite bod P.

a) $P=(?,5,?)$ *Výsledok*: $P=(12,5,-4)$

b) $P=(6,3,?)$ *Výsledok*: $P=(6,3,1)$

c) $P=(?,1,6)$. *Výsledok*: Taký $P \in p$ *neexistuje*

12. Presvedčte sa, že:

$$x_1 = 1 + u - 2v - w$$
$$x_2 = u + w$$
$$x_3 = -1 - u + v$$
$$x_4 = 2u - v + w$$

je parametrické vyjadrenie roviny v štvorrozmernom afinnom priestore. Ktorým parametrom zodpovedá v tomto vyjadrení bod $M = (4,1,-3,3)$?

Návod: Overte *LN* vektorov **u**,**v**,**w**.

13. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky v $\mathbf{A}^2$, ktorá

a) prechádza bodom $A = (3,-2)$ a má smerový vektor $\mathbf{a} = (-4,2)$,
Výsledok: $x=3-4t$, $y= -2+2t$; $t \in \mathbf{R}$

b) prechádza bodom $A = (3,-2)$ a má ten istý smer ako os x (prvá súradnicová os),
Výsledok: $x=3+t$, $y= -2$; $t \in \mathbf{R}$

c) prechádza bodmi $B = (2,3)$ a $C = (-5,-6)$,
Výsledok: $x=2-7t$, $y=3-9t$; $t \in \mathbf{R}$

d) prechádza bodom $D = (-4,10)$ a vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky (priamka p vytína na i-tej súradnicovej osi úsek a, ak a je i-ta súradnica priesečníku priamky p s touto osou),
Výsledok: $x= -4-t$, $y=10-t$; $t \in \mathbf{R}$

e) na y-osi vytína úsek 3 a prechádza bodom $M = (-5,3)$.
Výsledok: $x= -5+5t$, $y=3$; $t \in \mathbf{R}$

14. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v $\mathbf{A}^3$, ktorá

a) prechádza bodom $A = (1,2,3)$ a má smer $[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$ ($\mathbf{e}_i$ sú jednotkové súradnicové vektory),
Výsledok: $x=1+t$, $y=2+s$; $z=3$; $t,s \in \mathbf{R}$

b) prechádza bodom A a má smerové vektory $\mathbf{u} = (-5,6,4)$, $\mathbf{v} = (2,-1,0)$,
Výsledok: $x=1-5t+2s$, $y=2+6t-s$; $z=3+4t$; $t,s \in \mathbf{R}$

c) prechádza bodmi $B = (3,2,1)$, $C = (1,-1,0)$ a jej smer obsahuje smer y-osi,
Výsledok: $x=3+2t$, $y=2-3t+s$; $z=1+t$; $t,s \in \mathbf{R}$

d) prechádza bodom $N = (-2,3,0)$ a obsahuje priamku p: $(x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t)$,
Výsledok: $x= -2-3t$, $y=3-t+s$; $z=2t-s$; $t,s \in \mathbf{R}$

e) prechádza priamkou q: $(x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t)$ a jej smer obsahuje smer priamky

r: $(x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t)$.
Výsledok: $x = 2+3t+2s$, $y = -1+6t+3s$, $z = 4t - s$; $t,s \in \mathbf{R}$

15. Napíšte kanonické rovnice priamky a prepíšte ich do tvaru sústavy rovníc:

a) $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + 6t$, ***Výsledok***: $t = (x-1)/2 = (y-1)/3 = (z-3)/6$;
b) $x = 8 + 3t$, $y = -3t$, $z = 1 + 2t$. ***Výsledok***: $t = (x-8)/3 = y/-3 = (z-1)/2$;

16. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky určenej

a) bodom $A = (5,-1,4,2)$ a smerovým vektorom $\mathbf{a} = (3,-1,4,2)$,
Výsledok: $x_1=5+3t$, $x_2=-1-t$, $x_3=4+4t$, $x_4=2+2t$; $t \in \mathbf{R}$, $x_1+3x_2-2=0$, $4x_2+x_3=0$, $2x_2+x_4=0$
b) bodmi $B = (5,-1,3,2)$, $C = (6,-1,5,5)$.
Výsledok: $x_1=5+t$, $x_2=-1$, $x_3=3+2t$, $x_4=2+3t$; $t \in \mathbf{R}$, $x_2+1=0$, $2x_1-x_3-7=0$, $3x_1-x_4-13=0$

17. Nájdite parametrické vyjadrenie priamok v $\mathbf{A}^2$:

a) $5x_1 - 2x_2 + 10 = 0$, ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
b) $x_1 = 0$, ***Výsledok***: $x_1=0$, $x_2=t$; $t \in \mathbf{R}$,
c) $x_2 - 3 = 0$, ***Výsledok***: $x_1=t$, $x_2=3$; $t \in \mathbf{R}$,
d) $x_1 - x_2 = 0$. ***Výsledok***: $x_1=t$, $x_2=t$; $t \in \mathbf{R}$,

18. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou p:

$$2x+3y-z+5=0$$
$$3x-2y+2z-1=0$$

a má smerový vektor

a) $\mathbf{u} = (1,1,1)$,
b) $\mathbf{u} = (4,-7,-13)$.

19. Ukážte, že body $M = (-3,-3,7)$, $N = (-5,2,2)$ ležia v rovine určenej bodmi $A = (2,1,3)$, $B = (2,4,0)$, $C = (-3,0,4)$ a nájdite všeobecnú rovnicu priamky MN v afinnej súradnicovej sústave $\langle A, B-A, C-A \rangle$.

Návod: Určte parametre pre body M a N. Tieto parametre potom plnia funkciu súradníc v novej súr. sústave. Rovnicu priamky dostanete cez determinant.
Výsledok: $M=(t^M,s^M)=(-1,1)$, $N=(t^N,s^N)=(-4/5,7/5)$. $2x+y+1=0$

20. Napíšte sústavu rovníc podpriestoru α, ak

a) α: $x=1-t$, $y=1+3t$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
b) α: $x=1-t$, $y=1+3t$, $z=1-2t$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
c) α: $x=3$, $y=2-t$, $z=t$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
d) α: $x=3$, $y=4-15t$, $z=-36$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
e) α: $x=1+u+v$, $y=2+u-2v$, $z=2u+v$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
f) α: $x=1+u+v$, $y=3+u-v$, $z=2$ ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,
g) α: $x_1=2-2u+v$, $x_2=1+u+v$, $x_3=u+2v$, $x_4=-1-u+v$. ***Výsledok***: $x_1= -2+2t$, $x_2=5t$; $t \in \mathbf{R}$,

21. Dokážte totožnosť priamok

a) p: $x=1-2t$, $y=3t$, $z=-2+t$, q: $x=7+4t$, $y=-9-6t$, $z=-5-2t$
b) p: $3x+y-2z-6=0$, $41x-19y+52z-68=0$, q: $x-2y+5z-1=0$, $33x+4y-5z-63=0$
c) p: $4x+y+3z-5=0$, $7x-2y-z-5=0$, q: $x=-t$, $y=-4-5t$, $z=3+3t$.

22. Napíšte parametrické vyjadrenie podpriestoru α v $\boldsymbol{A}^2$, ak

a) α: $3x-y+5=0$ ***Výsledok***: $x = t$, $y = 5+3t$; $t \in \mathbf{R}$

b) α: $x-2=0$ ***Výsledok***: $x = 2$, $y = t$; $t \in \mathbf{R}$

c) α: $2x-y-7=0$, $x+y-8=0$ ***Výsledok***: $x = 5$, $y = 3$;

23. Napíšte parametrické vyjadrenie podpriestoru α v $\boldsymbol{A}^3$, ak

a) α: $x-3y+2z+5=0$, $2x+y+5z-3=0$ ***Výsledok***: $x = 4/7-17t$, $y = 13/7+69t$, $z = 7t$; $t \in \mathbf{R}$

b) α: $x-4y+3z+2=0$, $z-3=0$ ***Výsledok***: $x = -11+4t$, $y = t$, $z = 3$; $t \in \mathbf{R}$

c) α: $x+1=0$, $y-1=0$ ***Výsledok***: $x = -1$, $y = 1$, $z = t$; $t \in \mathbf{R}$

d) α: $y = 0$ ***Výsledok***: $x = t$, $y = 0$, $z = t$; $t \in \mathbf{R}$

e) α: $3x+4y-5z-6=0$ ***Výsledok***: $x = 2-4t+5s$, $y = 3t$, $z = 3s$; $t,s \in \mathbf{R}$

24. Dokážte, že množina σ stredov všetkých úsečiek, ktorých krajné body ležia na priamkach $\langle A\mathbf{u}\rangle$ a $\langle B\mathbf{v}\rangle$, kde $A = (1,2,0)$, $B = (3,4,6)$, $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1,1)$, je rovina a napíšte jej parametrické vyjadrenie.

Návod: Vyjadrite si parametricky priamky $\langle A\mathbf{u}\rangle$ a $\langle B\mathbf{v}\rangle$. Ďalej vyjadrite množinu všetkých stredov úsečiek podľa vzťahu $S_{AB} = A + ½ (B - A)$.

Výsledok: $x = 2 + t + s$, $y = 3 + t - s$, $z = 3 + t + s$; $t,s \in \mathbf{R}$

25. Napíšte rovnice strán rovnobežníka $ABCD$, ak viete, že jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode $M = (1,6)$ a priamky AB, BC, CD, DA prechádzajú po rade bodmi $P = (3,0)$, $Q = (6,6)$, $R = (5,9)$, $S = (-5,4)$.

Návod: Nakreslite si to a uvažujte o bodoch P',Q',R',S', ktoré sú stredovo súmerné s bodmi P,Q,R,S podľa bodu M.

3.7.3 Lineárna závislosť a nezávislosť bodov

26. Zistite, či sú dané body lineárne závislé

a) $A = (2001,2002,2003)$, $B = (2002,2002,2003)$ ***Výsledok***: nie,

b) $A = (2002,2003)$, $B = (2002,2003)$ ***Výsledok***: áno,

c) $A = (2,1)$, $B = (1,2)$, $C = (-3,6)$ ***Výsledok***: áno,

d) $A = (2,3)$, $B = (1,1)$, $C = (4,5)$ ***Výsledok***: nie,

e) $P = (0,1)$, $Q = (2,5)$, $R = (6,9)$, $S = (13,14)$. ***Výsledok***: áno,

27. Nech A,B,C,D,E sú body trojrozmerného afinného priestoru. Sú tieto body lineárne závislé? Svoju odpoveď zdôvodnite. ***Výsledok***: áno, pretože vektory $(B-A)$,$(C-A)$,$(D-A)$,$(E-A)$

28. Najviac koľko bodov v $\boldsymbol{A}^n$ môže byť lineárne nezávislých? ***Výsledok***: najviac $n+1$,

29. Zistite, či body $(-1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,1,1)$, $(2,2,-1)$ priestoru $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3,+)$ sú alebo nie sú lineárne závislé.

Výsledok: sú lineárne nezávislé.

30. *Dokážte: Body $A_1 = (a_1,0,...,0)$, ..., $A_n = (0,...,0,a_n)$, kde všetky čísla a_1, ..., a_n sú nenulové, sú lineárne nezávislé.

3.8 DOMÁCA ÚLOHA Č.3

1. Zistite, či bod M= (7,13,8), leží v podpriestore $A+V(\alpha)$, kde A = (2,2,1), $V(\alpha)$ = [(1,2,1), (1,3,0)].

Výsledok: M nepatrí (A + $V(\alpha)$)

2. Zistite, ktoré z bodov A = (5,8,15), B = (–1,–1,–3), C = (5,7,1), D = (0,½,0), E = (0,0,1) ležia na priamke $p = \{x_1 = 1+2t, x_2 = 2+3t, x_3 = 3+6t\}$.

Výsledok: Priamke p patria body A,B,D a nepatria C,E.

3. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v $\mathbf{A}^3$, ktorá prechádza bodom M = (–1,1,1) a obsahuje y-os.

Výsledok: $x = -1 - s$, $y = 1 + t + s$, $z = 1 + s$; $t,s \in \mathbf{R}$

4. Doplňte body A = (1,0,0), B = (1,2,3), C = (2,–1,2) priestoru ($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^3$,+) bodom D tak, aby bola množina A,B,C,D lineárne nezávislá.

Návod: Určte rovinu, ktorá prechádza bodmi A,B,C. Ďalej stačí zvoliť bod D tak, aby nepatril tejto rovine.

5. Na priamke a: $x = 4 - t$, $y = 2 + t$ nájdite taký bod, ktorý má rovnaké súradnice. Existuje na tejto priamke taký bod, ktorého prvá súradnica je dvojnásobkom druhej?

Výsledok: $X(3,3)$, $Y(4,2)$

6. Napíšte sústavu rovníc (všeobecné rovnice) podpriestoru α, ak:

a) α: $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - 2v$, $z = 2u + v$, ***Výsledok***: $5x+y-5z-7=0$

b) α: $x_1 = 2-2u+v$, $x_2 = 1+u+v$, $x_3 = u+2v$, $x_4 = -1-u+v$. ***Výsledok***: $x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 7 = 0$, $3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2 = 0$