

10 POLPRIESTOR

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vlastnosťami geometrických útvarov, ktoré súvisia s usporiadaním bodov na priamke. Budeme pracovať s úsečkami, polpriamkami, polrovinami a polpriestormi. Pri skúmaní spoločných vlastností polpriamok, polrovín a polpriestorov budeme pre ne používať spoločný názov *polpriestor*.

10.1 ÚSEČKY

Definícia 10.1: *Úsečka* (presnejšie **uzavretá úsečka**) AB je množina

$$[AB] = \{A + t(B-A); 0 \leq t \leq 1\}.$$

Otvorená úsečka AB vznikne z úsečky AB vynechaním bodov A, B : $(AB) = [AB] \setminus \{A, B\}$. Body A, B sa nazývajú *krajné body* (uzavretej alebo otvorenej) úsečky AB . V euklidovskom priestore sa ich vzdialenosť nazýva *dĺžka úsečky*.

Uzavretá úsečka bola definovaná priamo svojim parametrickým vyjadrením. Pre $t = 0, 1$ máme krajné body úsečky. Parametrické vyjadrenie otvorenej úsečky je

$$(AB) = \{A + t(B-A); 0 < t < 1\} \quad \text{pre } A \neq B.$$

Otvorená úsečka so splývajúcimi krajnými bodmi je prázdna množina, preto v tomto prípade predchádzajúce parametrické vyjadrenie otvorenej úsečky neplatí.

Definícia 10.2: Bod C leží medzi bodmi A, B , ak patrí otvorenej úsečke AB .

Medzi splývajúcimi bodmi neleží žiadny bod. Pre $A \neq B$ leží bod C medzi bodmi A, B práve vtedy, keď existuje také číslo t z otvoreného intervalu $(0, 1)$, že $C = A + t(B-A)$.

10.2 POLPRIESTORY

Definícia 10.3: Body A, B sú **oddelené nadrovinou** α (symbol $A\alpha B$), ak neležia v tej nadrovine a nadrovina α obsahuje bod, ktorý leží medzi bodmi A, B . Body A, B **ležia na rovnakej strane od nadroviny**, ak nepatria tej nadrovine a nie sú ňou oddelené.

Príklad 10.1: V afinnom priestore A^3 uvažujme rovinu α s rovnicou $z = 0$. Body $A = (0, 2, 1)$ a $B = (0, -1, -2)$ sú oddelené rovinou α : $z = 0$, lebo bod $C = (0, 1, 0)$ leží medzi bodmi A, B , pretože $C = A + 1/3(B-A)$, a leží aj v rovine α , lebo jeho súradnice vyhovujú rovnici $z = 0$.

Body $A = (0, 2, 1)$ a $D = (1, 2, 3)$ ležia na rovnakej strane od roviny α , lebo rovnica $1 + 2t = 0$, z ktorej sa určuje priesečník priamky AD s rovinou α , nemá riešenie v intervale $(0, 1)$. (Rovnica má jediné riešenie $t = -1/2$, čo znamená, že rovinu α pretína priamka AD , ale nepretína ju úsečka AD .)

Body $A = (0, 2, 1)$ a $E = (1, 2, 0)$ nie sú oddelené rovinou α , ani neležia na rovnakej strane od nej, lebo $E \in \alpha$.

Odteraz predpokladáme, že v afinnom priestore A^n máme danú afinnú sústavu súradníc a nadrovinu α s rovnicou $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$. Ľavú stranu tejto rovnice budeme zapisovať v tvare $L(X)$. $L(X)$ je teda funkcia z A^n do $\mathbf{R}$, ktorá ľubovoľnému bodu X priradzuje číslo

$$L(X) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 \quad \text{pre } X = (x_1, \dots, x_n) \quad (10.1)$$

Túto funkciu rozšírime aj na vektory z $V(A^n)$ predpisom

$$L(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad \text{pre } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad (10.2)$$

Rovnicu nadroviny α resp. jej smeru $V(\alpha)$ môžeme teraz stručne zapísať v podobe

$$\alpha: L(X) = 0 \quad \text{resp.} \quad V(\alpha): L(\mathbf{x}) = 0.$$

Lema 10.1: Pre všetky body A, B , vektory $\mathbf{u}$ a čísla t platí

a) $L(A + t(B - A)) = L(A) + t(L(B) - L(A)) = (1 - t)L(A) + tL(B)$.

b) $L(A + \mathbf{u}) = L(A) + L(\mathbf{u})$.

c) Ak $\mathbf{u} = B - A$, tak $L(\mathbf{u}) = L(B) - L(A)$.

Dôkaz: Priamy výpočet so súradnicami $A = (p_1, \dots, p_n)$, $B = (q_1, \dots, q_n)$ a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$. ☑

Skutočnosť, že dve nenulové čísla a, b majú rovnaké znamienka, teda že obidve sú kladné, alebo obidve sú záporné, často vyjadrujeme nerovnosťou $ab > 0$. Podobne nerovnosť $ab < 0$ znamená, že nenulové čísla a, b majú rôzne znamienka.

Lema 10.2:

a) Body A, B sú oddelené nadrovinou α : $L(X) = 0$ práve vtedy, keď $L(A)L(B) < 0$.

b) Body A, B ležia na rovnakej strane od nadroviny α : $L(X) = 0$ práve vtedy, keď $L(A)L(B) > 0$.

Dôkaz: stačí urobiť pre časť a). Bod $X \in \alpha$ leží medzi bodmi A, B práve vtedy, keď

$$X = A + t(B - A), \text{ pričom } 0 < t < 1 \text{ a súčasne } L(X) = 0.$$

Preto v súlade a Lemou 1a máme dokázať, že rovnica

$$(1 - t)L(A) + tL(B) = 0, \quad \text{kde } L(A) \neq 0, L(B) \neq 0 \quad (10.3)$$

pre neznámu t má riešenie vyhovujúce podmienkam

$$t > 0 \text{ a } 1 - t > 0 \quad (10.4)$$

práve vtedy, keď čísla $L(A), L(B)$ majú opačné znamienka.

Ak $t > 0$ a $1 - t > 0$, a ak číslo t vyhovuje rovnici (10.3), tak $L(A)/L(B) = -(1 - t)/t$, čo je záporné číslo, preto čísla $L(A), L(B)$ majú opačné znamienka.

Ak majú nenulové čísla $L(A), L(B)$ rôzne znamienka, tak $L(A) - L(B) \neq 0$ a rovnica (10.3) má riešenie

$$t = L(A)/[L(A) - L(B)].$$

Dokážeme, že pre číslo t platia nerovnosti (11.4). Tri čísla $L(A), -L(B)$ a $L(A) - L(B)$ sú nenulové a majú rovnaké znamienka, preto $t > 0$. Pretože $1 - t = -L(B)/[L(A) - L(B)]$, aj $1 - t > 0$. ☑

Definícia 10.4: *Otvorený polpriestor vzhľadom na nadrovinu α* je neprázdna množina bodov s vlastnosťami

- (i) každé dva body z otvoreného polpriestoru ležia na rovnakej strane od nadroviny α ,
- (ii) otvorený polpriestor obsahuje s každým svojim bodom aj všetky body priestoru, ktoré s ním ležia na rovnakej strane od nadroviny α .

Uzavretý polpriestor (skrátene len **polpriestor**) vzhľadom na nadrovinu α je zjednotenie otvoreného polpriestoru vzhľadom na α s nadrovinou α . *Polpriamka* resp. *polrovina* je polpriestor jednorozmerného resp. dvojrozmerného afinného priestoru.

Veta 10.1: Existujú práve dva otvorené a práve dva uzavreté polpriestory vzhľadom na nadrovinu α . Sú to množiny bodov vyjadrené nerovnicami

$$L(X) > 0 \text{ resp. } L(X) < 0 \quad (\text{pre otvorené polpriestory})$$

$$L(X) \geq 0 \text{ resp. } L(X) \leq 0 \quad (\text{pre uzavreté polpriestory}).$$

Dôkaz: zrejme stačí urobiť pre otvorené polpriestory. Z lemy 2b vyplýva, že obidve množiny P_+ : $L(X) > 0$ a P_- : $L(X) < 0$ vyhovujú podmienkam (i) a (ii) z definície 4. Aby sme dokázali, že sú polpriestormi, stačí dokázať, že obe sú neprázdne. Zvoľme ľubovoľný bod $M \in \alpha$ a ľubovoľný vektor $\mathbf{u} \notin V(\alpha)$. Podľa lemy 1b pre body $A = M + \mathbf{u}$ a $B = M - \mathbf{u}$ platí $L(A) = L(\mathbf{u}) \neq 0$ a $L(B) = -L(\mathbf{u}) \neq 0$, preto jeden z nich leží v množine P_+

a druhý v P_- , teda obe tieto množiny sú neprázdne. Preto existujú aspoň dva otvorené polpriestory vzhľadom na α .

Aby sme dokázali, že existujú najviac dva otvorené polpriestory vzhľadom na α , stačí dokázať, že každý otvorený polpriestor splýva s jedným z polpriestorov P_+ alebo P_- .

Nech P je ľubovoľný polpriestor vzhľadom na α a nech A je jeho ľubovoľný bod. Zrejme $L(A) \neq 0$ (lebo $A \notin \alpha$), preto $A \in P_+$ alebo $A \in P_-$. Nech kvôli určitosti $A \in P_+$, čiže $L(A) > 0$.

Nech $X \in P_+$ je ľubovoľný bod. Vtedy $L(X) > 0$, preto podľa lemy 2a body A a X ležia na rovnakej strane od α , a pretože $A \in P$, podľa vlastnosti (ii) otvoreného polpriestoru $X \in P$. Dokázali sme, že $P_+ \subset P$.

Obrátene, nech $X \in P$ je ľubovoľný bod. Z vlastnosti (i) otvoreného polpriestoru a z lemy 2 dostávame, že $L(A)L(X) > 0$, a pretože číslo $L(A)$ je kladné, je kladné aj $L(X)$, čiže $X \in P_+$. Preto $P \subset P_+$, a teda $P = P_+$. ☒

Uzavretý resp. otvorený polpriestor vzhľadom na nadrovinu α obsahujúci bod A budeme označovať $[\alpha A]$ resp. (αA) . O týchto polpriestoroch hovoríme, že sú určené nadrovinou α a bodom A . Zrejme platí

$$[\alpha A] = (\alpha A) \cup \alpha.$$

Polpriestory $[\alpha A]$ resp. (αA) sa niekedy označujú symbolmi $\rightarrow \alpha A$ resp. $\rightarrow \alpha A^\circ$.

Poznámka 10.1: Vzťah „dva body ležia na rovnakej strane od nadroviny α “ je podľa lemy 2b zrejme reláciou ekvivalencie na množine $A^n \setminus \alpha$ všetkých bodov priestoru nepatriacich nadrovine α . Definíciu 10.4 môžeme teda sformulovať omnoho stručnejšie: Otvorený polpriestor vzhľadom na nadrovinu α je trieda ekvivalencie vzhľadom na uvedenú reláciu. Polpriestor (αA) je trieda ekvivalencie bodu A . Z tohto pohľadu na polpriestory sa dá veta 1 dokázať omnoho jednoduchšie.

Z vety 1 ihneď vyplýva

Veta 10.2: Nerovnica

$$[\alpha A]: L(A)L(X) \geq 0 \quad \text{resp.} \quad (\alpha A): L(A)L(X) > 0$$

je analytickým vyjadrením otvoreného resp. uzavretého polpriestoru určeného nadrovinou α a bodom A ☒

Príklad 10.2: Nájdite prienik priamky AB s otvorenou polrovinou pA , ak

$$A = (2, 1), B = (1, 6), p: x + y + 1 = 0.$$

Riešenie: V označení (10.1) máme $L(X) = x + y + 1$, preto $L(A) = 2 + 1 + 1 = 4$. Polrovina (pA) má teda nerovnicu $4(x + y + 1) > 0$, po zjednodušení

$$(pA): x + y + 1 > 0.$$

Priamka AB má parametrické vyjadrenie $x = 2 - t, y = 1 + 5t$. V polrovine (pA) ležia práve tie body priamky AB , pre ktoré $(2 - t) + (1 + 5t) + 1 > 0$. Preto analytické vyjadrenie prieniku priamky AB s otvorenou polrovinou pA je

$$\langle AB \rangle \cap (pA): x = 2 - t, y = 1 + 5t, t > -1$$



Definícia 10.5: V nadrovine α zvolíme ľubovoľný bod M . Hovoríme, že vektor $\mathbf{u} \notin V(\alpha)$ smeruje do otvoreného alebo uzavretého polpriestoru P , ak $M + \mathbf{u} \in P$.

Polpriestor P z definície 5 nezávisí od voľby pomocného bodu $M \in \alpha$, lebo podľa lemy 1b pre každý taký bod platí

$$L(M + \mathbf{u}) = L(M) + L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) \quad (10.5)$$

Uzavretý resp. otvorený polpriestor vzhľadom na nadrovinu α , do ktorého smeruje vektor $\mathbf{u}$, budeme označovať symbolom $[\alpha \mathbf{u}]$ resp. $(\alpha \mathbf{u})$. Je to polpriestor určený bodom $M + \mathbf{u}$, $M \in \alpha$, preto z rovností (10.5) vyplýva jeho analytické vyjadrenie

$$[\alpha \mathbf{u}]: L(\mathbf{u})L(X) \geq 0 \quad \text{resp.} \quad (\alpha \mathbf{u}): L(\mathbf{u})L(X) > 0. \quad (10.6)$$

Pomocou nerovnic polpriestorov $[\alpha u]$, $[\alpha A]$ a $[\alpha v]$ ľahko overíme, že

$$[\alpha u] = [\alpha A] \Leftrightarrow L(u)L(A) > 0, \quad (10.6a)$$

$$[\alpha u] = [\alpha v] \Leftrightarrow L(u)L(v) > 0. \quad (10.6b)$$

10.3 POLPODPRIESTORY

Doterajšie výsledky nám umožňujú hovoriť o polpriamke iba ako o časti jednorozmerného priestoru, ale nie napríklad o polpriamke v rovine. Aby sme odstránili túto nepružnosť, uvádzame nasledujúcu definíciu 6. Využívame v nej vetu, podľa ktorej každý podpriestor afinného priestoru je afinným priestorom. Ak máme danú dvojicu podpriestorov α, β pričom $\alpha \subset \beta$ a $\dim \alpha = \dim \beta - 1$, tak podpriestor α je nadrovinou v afinnom priestore β , preto ho podľa vety 1 rozkladá na dva polpriestory.

Definícia 10.6: Polpodpriestor afinného priestoru je polpriestor podpriestoru afinného priestoru.

Polpodpriestor najčastejšie zadávame v tvare $[\alpha A]$ resp. $[\alpha u]$, kde α je ľubovoľný podpriestor afinného priestoru a bod A nie je jeho bodom resp. vektor u nie je jeho smerovým vektorom. Polpodpriestor $[\alpha A]$ je polpriestor podpriestoru $\beta = \alpha + \langle A-M \rangle = M + [V(\alpha) + \langle A-M \rangle]$, kde M je ľubovoľný bod podpriestoru α . Podobne $[\alpha u]$ je polpriestor podpriestoru $\alpha + \langle u \rangle = M + [V(\alpha) + \langle u \rangle]$. Ak je podpriestor α určený bodmi $A_1, \dots, A_k$, tak symbol polpodpriestoru $[\langle A_1 \dots A_k \rangle B]$ zjednodušujeme na $[A_1 \dots A_k B]$ a podobne pre $[A_1 \dots A_k u]$, $(A_1 \dots A_k B)$ a $(A_1 \dots A_k u)$. Napríklad polrovinu určenú priamkou $\langle AB \rangle$ a bodom C , pričom $A, B, C \in A^n$, $n \geq 2$, $C \notin \langle AB \rangle$, označujeme $[ABC]$.

Veta 10.3: Nech $\alpha = \langle A, u_1, \dots, u_k \rangle$, pričom vektory $u_1, \dots, u_k$ sú lineárne nezávislé, a nech $u \notin V(\alpha)$. Potom polpodpriestory $[\alpha u]$ a (αu) majú parametrické vyjadrenia

$$[\alpha u]: X = A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k + t_{k+1} u, \quad t_{k+1} \geq 0. \quad (10.7)$$

$$(\alpha u): X = A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k + t_{k+1} u, \quad t_{k+1} > 0. \quad (10.7a)$$

Dôkaz: Polpodpriestor $[\alpha u]$ je polpriestorom v priestore $A' = \beta = \langle A, u_1, \dots, u_k, u \rangle$ vzhľadom na jeho nadrovinu α . Z predpokladov o vektoroch $u_1, \dots, u_k$ a u vyplýva, že $(u_1, \dots, u_k, u)$ je báza vektorového priestoru $V(A') = V(\beta)$. V sústave súradníc $A, u_1, \dots, u_k, u$ priestoru A' má bod X z (11.7) súradnice $(t_1, \dots, t_k, t_{k+1})$ a vektor u má súradnice $(0, \dots, 0, 1)$. Nadrovina α priestoru A' má rovnicu $t_{k+1} = 0$, preto $L(X) = t_{k+1}$, $L(u) = 1$ a $L(u)L(X) = t_{k+1}$. Polpodpriestor $[\alpha u]$ ako polpriestor v priestore A' je analyticky vyjadrený podmienkou $L(u)L(X) \geq 0$, čiže podmienkou $t_{k+1} \geq 0$. Podobne pre otvorený polpriestor (αu) . ☑

Príklad 10.3: Zostavte parametrické vyjadrenie polroviny $[ABC]$, $A = (4, 5, -1)$, $B = (2, 7, 3)$, $C = (5, 7, -6)$.

Riešenie: Polrovina $[ABC]$ je určená bodom A a vektormi $B - A = (-2, 2, 4)$, $C - A = (1, 2, -5)$. Teda

$$[ABC]: x = 4 - 2u + v, \quad v \geq 0$$

$$y = 5 + 2u + 2v$$

$$z = -1 + 4u - 5v$$



Poznamenajme, že každý polpriestor je polpodpriestorom, a to v (triviálnom) podpriestore $\beta = A^n$, preto veta 3 pre $k = n$ hovorí aj o parametrickom vyjadrení podpriestoru.

10.4 TROJUHOLNÍKY

Definícia 10.7: Nech A, B, C sú lineárne nezávislé body afinného priestoru. Trojuholník ABC (symbol ΔABC) je prienik polrovín $[ABC]$, $[BCA]$ a $[CAB]$. Body A, B, C sa nazývajú vrcholy trojuholníka a úsečky AB , BC a CA sa nazývajú strany trojuholníka.

Poznámka 10.2: Je treba upozorniť, že v závislosti od kontextu pod stranou trojuholníka niekedy rozumieme tiež priamku určenú vrcholmi trojuholníka a niekedy vzdialenosť dvoch vrcholov trojuholníka.

Definícia 10.8: Obsah trojuholníka ABC v euklidovskom priestore je číslo

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} zv, \text{ kde } z = |AB| \text{ a } v = |C \langle AB \rangle|$$

Nasledujúca veta umožňuje vypočítať obsah trojuholníka priamo zo súradníc jeho vrcholov.

Veta 10.4: Pre obsah trojuholníka ABC v euklidovskej rovine s karteziánskou sústavou súradníc platí

a) $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\det(B - A, C - A)|$

b) $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\det(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})|$

Dôkaz:

a) Rovnicu priamky AB môžeme napísať v tvare $(B - A)^\perp \cdot (X - A) = 0$, pričom vektor $(B - A)^\perp$ sme definovali v úlohe 6.31. Podľa tejto úlohy $(B - A)^\perp \cdot (X - A) = \det(B - A, X - A)$ a $|(B - A)^\perp| = |B - A|$, preto podľa dôsledku 7.1

$$v = |C \langle AB \rangle| = |\det(B - A, C - A)| / |B - A|.$$

Odtiaľ $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} zv = \frac{1}{2} |\det(B - A, C - A)|$, lebo $z = |AB| = |B - A|$.

b) Tvrdenie vyplýva z rovnosti

$$\det(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = \det(B - A, C - A) \quad (10.8)$$

Získame ju tak, že prvý stĺpec determinantu na ľavej strane odčítame od zvyšných dvoch a takto upravený determinant rozvineme podľa posledného riadku. ☒

Veta 6b má nasledujúci

Dôsledok 10.1: Obsah trojuholníka nezávisí od poradia jeho vrcholov, teda ani od toho, ktorú jeho stranu považujeme za „základňu“.

10.5 ÚLOHY

1. Zistite, či bod C leží na uzavretej úsečke AB , $A = (2, 2, -1)$, $B = (5, 7, 2)$, ak

a) $C = (2, 2, -1)$ [áno]

b) $C = (3, 3, 0)$ [áno]

c) $C = (4, 5, 1)$ [áno]

d) $C = (3, 4, 0)$ [nie]

e) $C = (6, 9, 3)$ [nie]

2. Zistite, či bod C leží medzi bodmi A , B , $A = (-2, -3)$, $B = (1, 3)$, ak

a) $C = (-3, -6)$ [nie]

b) $C = (-1, 0)$ [áno]

c) $C = (0, 1)$ [áno]

d) $C = (0, 2)$ [nie]

e) $C = (1, 3)$. [nie]

3. Zistite prienik uzavretých úsečiek AB , CD , $A = (-1, 2)$, $B = (2, 8)$, ak

a) $C = (-2, 5)$, $D = (4, 2)$ [bod $P = (0, 4)$]

b) $C = (1, 5)$, $D = (3, 7)$ [$\emptyset$]

c) $C = (1, 6)$, $D = (3, 8)$ [bod C]

d) $C = (-3, -2)$, $D = (-2, 0)$ [$\emptyset$]

- e) $C = (-3, -2)$, $D = (2, 8)$ [úsečka AB]
- f) $C = (2, 5)$, $D = (1, 3)$. [Ø]
4. Zistite, či sú body K, L oddelené rovinou $\pi: 2x - y + 3 = 0$, ak
- a) $K = (0, 0, 0)$, $L = (-3, 1, 1)$ [áno]
- b) $K = (2, 1, 17)$, $L = (1, 2, 8)$ [nie]
- c) $K = (1, 3, 3)$, $L = (3, -1, 2)$ [nie]
5. Nájdite prienik uzavretej úsečky AB s rovinou α , ak $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, -1)$ a
- a) $\alpha: x + y + z - 1 = 0$ [AB]
- b) $\alpha: 2x - y + z + 2 = 0$. [Ø]
6. ⁺ V ľubovoľnom afinnom priestore definujte v zhode s kapitolou 1 orientovanú úsečku a reláciu „orientované úsečky majú rovnaký smer“. Dokážte: V euklidovskom priestore platí: $B - A = D - C \Leftrightarrow$ orientované úsečky AB, CD majú rovnakú dĺžku a rovnaký smer.
7. ⁺ Na priamke ležia rovnako orientované úsečky AB, CD . Úsečka AB sa plynule posúva v smere svojej orientácie. Vypíšte všetky možnosti pre prienik úsečiek AB, CD .
[Ø, $B = C$, $[CB]$, $[AB]$ (ak $|AB| \leq |CD|$) alebo $[CD]$ (ak $|AB| > |CD|$), $[AD]$, $D = A$]
8. Zostavte analytické vyjadrenie polpriestoru
- a) $[\alpha P]$, $\alpha: x + 2y - z - 7 = 0$, $P = (1, 2, 1)$ [$x + 2y - z - 7 \leq 0$]
- b) $[ABCD]$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 0, 0)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (0, 0, 2)$. [$x + y - z \leq 0$]
9. Napíšte parametrické vyjadrenie polpriamky resp. polroviny
- a) $\langle AB \rangle$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (5, 4, -1)$ [$x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 3 - 2t$, $t \geq 0$]
- b) $[ABC]$, $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 4, -1)$, $C = (0, 1, 3)$ b) [$x = 1 + u - v$, $y = 2 + 2u - v$, $z = -u + 3v$, $v \geq 0$]
- c) $[pA]$, $p: x + y + 3z - 4 = 0$, $x - y + z - 2 = 0$, $A = (2, 2, -1)$. [$x = 1 + 2u + v$, $y = u + 2v$, $z = 1 - u - 2v$, $v \geq 0$]
10. Napíšte analytické vyjadrenie polpriamok a polrovín z predošlej úlohy prostredníctvom lineárnych rovníc a nerovníc.
[a) $x - 2y + 3 = 0$, $2y + z - 7 = 0$, $x + y + z - 6 > 0$ b) $5x - 2y + z - 1 \geq 0$ c) $y + z - 1 = 0$, $x + y + 3z - 4 \leq 0$]
11. Nájdite prienik polpriamok $[AB]$, $[MN]$, ak
- a) $A = (-2, -1)$, $B = (-1, 0)$, $M = (-1, 2)$, $N = (5, -1)$ [$P = (1, 1)$]
- b) $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $M = (-2, 3)$, $N = (2, -1)$ $[[AC]]$
- c) $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 2, 1)$, $M = (-1, 3, 1)$, $N = (-1, 1, 1)$ [Ø]
- d) $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 5)$, $M = (2, 3, 4)$, $N = (7, 8, 9)$. $[[MN]]$
12. Zostavte parametrické vyjadrenie
- a) pásu určeného rovnobežkami p, q , pričom $p = \langle AB \rangle$, $E \in q$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $E = (1, 1)$ [$x + y - 1 \geq 0$, $x + y - 2 \leq 0$]
- b) trojuholníka ABC , $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 2)$ [$y \geq 0$, $2x - y \geq 0$, $2x + y - 4 \leq 0$]
- c) uhla AVB , $A = (1, 0)$, $V = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ [$y \geq 0$, $x - y \geq 0$]
- d) trojuholníka ABC , $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (3, 1, 2)$
[$x - y - z = 0$ a napr. $z - 1 \geq 0$, $y - z + 1 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$. Parametricky $x = 1 + u + 2v$, $y = u + v$, $z = 1 + v$, $u, v \geq 0$, $u + v \leq 1$]
13. Zistite, či bod M leží v trojuholníku ABC , $A = (-2, -1)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 4)$, ak
- a) $M = (1, 2)$ [áno]
- b) $M = (-1, 2)$ [nie]

c) $M = (2,1)$ [áno]

d) $M = (3,1)$ [áno]

e) $M = (2,3)$. [nie]

[Návod: Trojuholník môžeme vyjadriť sústavou nerovníc $x-6y-4 \leq 0$, $x+y-4 \leq 0$, $5x-2y+8 \geq 0$]

14. Určite prienik priamky p s trojuholníkom ABC , $p: x+y-4=0$, $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (2,3)$

[Úsečka $A'B'$, $A' = (5/2, 3/2)$, $B' = (8/5, 12/5)$.]

15. (Pokračovanie úlohy 7.16) Dokážte, že trojuholníkovú nerovnosť možno upresniť:

$|AC| = |AB| + |BC|$ práve vtedy, keď $B \in [AC]$.

[Návod: Diskutujte rovnicu $|t| + |1-t| = 1$.]

16. * Daná je nadrovina $\alpha: \mathbf{n} \cdot (X - A) = 0$. Dokážte: $(\alpha \mathbf{n}): \mathbf{n} \cdot (X - A) > 0$.

[Návod: Použite (11.6) a presvedčte sa, že $L(\mathbf{n}) > 0$ pre funkciu $L(X) = \mathbf{n} \cdot (X - A)$.]

17. Dokážte, že pre obsah trojuholníka platí

a) $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{G(B-A, C-A)}$

[Návod: Úloha 10.14.]

b) $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |AB| |AC| \sin \angle(B-A, C-A)$

[Návod: Veta 10.1c.]

11 DELIACI POMER

11.1 DELENIE VEKTOROV

V definícii 1 priradíme trojici kolineárnych bodov afinného priestoru číslo, ktoré bude do istej miery nahrádzať v tomto priestore nedefinovanú vzdialenosť bodov. Najprv ale zavedieme operáciu delenia vektorov, ktorú však možno aplikovať len na lineárne závislé vektory.

Podielom dvoch lineárne závislých vektorov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ je číslo $\mathbf{u}/\mathbf{v}$ určené takto:

$$\mathbf{u}/\mathbf{v} = k \text{ znamená, že } \mathbf{u} = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R} \quad (11.1)$$

11.2 DELIACI POMER

Definícia 11.1: Nech $A \neq B \neq C$ sú tri body, pričom bod C leží na priamke AB . *Deliaci pomer trojice bodov* (A, B, C) alebo tiež *deliaci pomer bodu C vzhľadom na dvojicu bodov (A, B)* (skrátene len *deliaci pomer bodu C*) je číslo $(ABC) = (C - A)/(C - B)$.

Poznámka 11.1: Deliaci pomer (ABC) je číslo λ spĺňajúce podmienku $C - A = \lambda(C - B)$. Odtiaľ a z obmedzení $A \neq B \neq C$ vyplýva, že

$$(ABC) \neq 1 \text{ pre všetky body } C \text{ priamky } AB, C \neq B$$

lebo z $(ABC) = 1$ vyplýva $C - A = C - B$ a odtiaľ $A = B$.

Veta 11.1: (Výpočet deliaceho pomeru). Nech bod C leží na priamke AB . Potom

a) Ak $A = (a_1, \dots)$, $B = (b_1, \dots)$, $C = (c_1, \dots)$ a $b_i \neq c_i$, tak $(ABC) = (c_i - a_i)/(c_i - b_i)$.

b) Ak $C = A + t(B - A)$ a $t \neq 1$, tak $(ABC) = t/(t - 1)$.

c) Ak $C = aA + bB$ a $a \neq 0$, tak $(ABC) = -b/a$.

Dôkaz: Podľa poznámky 1 máme $(C - A) = (ABC)(C - B)$. Po prepísaní do súradníc pre každé $i = 1, \dots, n$ získame $(c_i - a_i) = (ABC)(c_i - b_i)$, a teda a) platí. Zostávajúce tvrdenia získame z a) jednoduchými úpravami. ☒

Veta 1b má nasledujúci

Dôsledok 11.1: Nech bod C leží na priamke AB a je rôzny od bodu B . Potom

a) $(ABA) = 0$,

b) $(ABC) = -1$ práve vtedy, keď bod C je stred úsečky AB ,

c) $(ABC) < 0$ práve vtedy, keď bod C leží medzi bodmi A, B ,

d) $(ABC) > 1$ práve vtedy, keď bod C leží na otvorenej polpriamke $(A(A-B))$,

e) $0 < (ABC) < 1$ práve vtedy, keď bod C leží na otvorenej polpriamke $(B(B-A))$. ☒

Z definície deliaceho pomeru vyplýva

$$|(ABC)| = |AC|/|BC| \quad (11.2)$$

Odtiaľ a z tvrdenia c) predchádzajúceho dôsledku dostávame

Dôsledok 11.2: Ak A, B, C sú body euklidovského priestoru, pre ktoré existuje deliaci pomer (ABC) , tak

$$(ABC) = |AC|/|BC|, \text{ ak bod } C \text{ neleží medzi bodmi } A, B$$

$$(ABC) = -|AC|/|BC|, \text{ ak bod } C \text{ leží medzi bodmi } A, B$$



Pomocou deliaceho pomeru môžeme určovať polohu bodu na priamke:

Veta 11.2: Nech $(ABC) = \lambda$. Potom

a) $C = ((a_1 - \lambda b_1)/(1 - \lambda), \dots)$, ak $A = (a_1, \dots)$, $B = (b_1, \dots)$,

b) $C = A + \lambda/(\lambda - 1) (B - A)$,

c) $C = 1/(1 - \lambda)A - \lambda/(1 - \lambda)B$.

Dôkaz: a) Podľa poznámky 1 pre všetky i platí $\lambda(c_i - b_i) = (c_i - a_i)$. Z tejto rovnosti vyjadríme c_i . Tvrdenia b), c) získame podobne z odpovedajúcich častí vety 1. ☑

Ako aplikáciu deliaceho pomeru uvádzame nasledujúce dve vety. Ich dôkazy ilustrujú využitie analytickej metódy v geometrii.

Veta 11.3: (Menelaos) Nech A, B, C sú nekolineárne body a nech $A' \in \langle BC \rangle$, $B' \in \langle CA \rangle$, $C' \in \langle AB \rangle$ sú body rôzne od bodov A, B, C . Potom body A', B', C' sú kolineárne práve vtedy, keď

$$(ABC')(BCA')(CAB') = 1. \quad (11.3)$$

Dôkaz: Zvoľme afinnú sústavu súradníc tak, že $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ a $C = (0,1)$. Body C' a B' majú po rade súradnice $(c,0)$ a $(0,b)$, pričom $c, b \neq 0, 1$. Využitím úsekového tvaru rovnice nadroviny dostávame, že priamka BC má rovnicu $x + y - 1 = 0$, preto $A' = (a, 1-a)$, $a \neq 0, 1$. Na základe vety 1a platí

$$(ABC') = c/(c-1), (BCA') = (a-1)/a, (CAB') = (b-1)/b$$

Po jednoduchých úpravách ľahko zistíme, že rovnosť (11.3) je ekvivalentná s rovnosťou

$$ab - ac - bc + c = 0. \quad (11.4)$$

Na druhej strane, podmienka kolinearnosti bodov A', B', C' je podľa vety 3.10 ekvivalentná s rovnosťou

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 1-a & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ktorá je zrejme tiež ekvivalentná s rovnosťou (11.4). ☑

Veta 11.4: (Ceva, čítaj čéva). Nech body A, B, C a A', B', C' spĺňajú predpoklady vety 3. Potom priamky AA', BB', CC' prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď

$$(ABC')(BCA')(CAB') = -1. \quad (11.5)$$

Dôkaz: Zvoľme rovnakú sústavu súradníc ako v dôkaze vety 3 a rovnako označíme súradnice bodov A', B', C . Vtedy je podmienka (11.5) ekvivalentná s rovnosťou

$$2abc - ab - ac - bc + c = 0. \quad (11.6)$$

Na druhej strane, priamky AA', BB' a CC' môžeme vyjadriť rovnicami

$$AA': (a-1)x + ay = 0,$$

$$BB': bx + y - b = 0,$$

$$CC': x + cy - c = 0.$$

Podľa úlohy 4.4.33 tieto tri priamky prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} a-1 & a & 0 \\ b & 1 & -b \\ 1 & c & -c \end{vmatrix} = 0$$

teda práve vtedy, keď platí rovnosť (11.6). ☑

Poznámka 11.2: V literatúre sa môžeme stretnúť s tzv. *pomerom* bodu C vzhľadom na body A, B , pričom $A \neq B \neq C$ a bod C leží na priamke AB . Definuje sa ako číslo $(C - A)/(B - C)$, teda sa rovná číslu $-(ABC)$, čo znamená, že v podstate je ekvivalentný s deliacim pomerom. Jeho výhodou oproti deliacemu pomeru (ABC) je, že je kladný práve pre body C ležiace medzi bodmi A, B .

11.3 ZMIEŠANÝ SÚČIN TROCH VEKTOROV

Definícia 10.3 Zmiešaný súčin vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_{or}^3$ je číslo $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, teda skalárny súčin vektorov $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Veta 10.5 Pre $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ platí

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Dôkaz: Stačí rozvinúť determinant podľa tretieho riadku. ☑

Veta 10.6 (Vlastnosti zmiešaného súčinu)

- a) $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$,
- b) $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}) = (\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}) = -(\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{c}) = -(\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b})$,
- c) $(\mathbf{a} + \mathbf{a}' \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) + (\mathbf{a}' \mathbf{b} \mathbf{c})$ (podobne pre súčty v druhom a treťom činiteli),
- d) $(k\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} k\mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} k\mathbf{c}) = k(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$,
- e) $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = 0$ práve vtedy, keď sú vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárne závislé,
- f) $(\mathbf{a} + k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$ (podobne pre lineárnu kombináciu v druhom a treťom činiteli),
- g) $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) > 0$ práve vtedy, keď vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tvoria kladnú bázu.

Dôkaz: a) Rozvoj determinantu z vety 5 podľa prvého riadku.

b) Využijeme zmenu znamienka determinantu pri zmene poradia jeho stĺpcov.

c) Využijeme tvrdenie a) a distributívny zákon pre skalárny súčin:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{a}' \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) + (\mathbf{a}' \mathbf{b} \mathbf{c}).$$

d) Opäť využijeme tvrdenie a): $(k\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (k\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = k[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = k(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$.

e) Determinant z vety 5 je nulový práve vtedy, keď má lineárne závislé riadky.

f) Využijeme tvrdenia a), e): $(\mathbf{a} + k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) + (k\mathbf{b} \mathbf{b} \mathbf{c}) + (l\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) + 0 + 0$.

g) Tvrdenie vyplýva z druhej časti poznámky 9.3. ☑

Veta 10.7 (Aplikácie zmiešaného súčinu)

a) $(\mathbf{u} \mathbf{v} X - A) = 0$ je rovnica roviny $\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}$ a $(\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{x}) = 0$ je rovnica jej smeru.

b) Vzdialenosť bodu X od roviny $\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}$ je $|(\mathbf{u} \mathbf{v} X - A)| / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

c) Objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$ vo fyzikálnom priestore F^3 je

$$V(ABCDEFGH) = |(B - A) D - A E - A|.$$

Dôkaz: a) Vektor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je normálový vektor danej roviny. Veta 4.6 hovorí, že rovinu $\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}$ môžeme vyjadriť rovnicou $\mathbf{n} \cdot (X - A) = 0$ Jej ľavá strana je zmiešaný súčin $(\mathbf{u} \mathbf{v} X - A)$.

b) Tvrdenie vyplýva z tvrdenia a) a z dôsledku 7.3.

c) Podľa vety 4f obsah podstavy hranola $ABCDEFGH$ je $S = |(B - A) \times (D - A)|$ a podľa tvrdenia b) výška hranola je $v = |(B - A \cdot D - A \cdot E - A)| / |(B - A) \times (D - A)| = |(B - A \cdot D - A \cdot E - A)| / S$. ☒

11.4 ÚLOHY

1. Vypočítajte deliaci pomer (ABC)

a) $A = (2, 0, -3), B = (3, 1, 0), C = (4, 2, 3)$ [2]

b) $A = (2, 0, -3), B = (3, 1, 0), C = (-1, -3, -12)$ [3/4]

c) $A = (2, 0, -3), B = (3, 1, 0), C = (6, 4, 9)$ [nedefinovaný]

d) $C = A + 4(B - A)$ [4/3]

e) $C = A + 3(A - B)$ [3/4]

f) $C = (3/5)A + (2/5)B$ [-2/3]

2. Vypočítajte bod C , ktorý rozdeľuje úsečku AB , $A = (1, -1, -2)$, $B = (5, 3, 10)$ v pomere

a) $1 : 3$ [$C = (2, 0, 1)$]

b) $m : n, m, n > 0$. [$C = ((5m + n)/(n + m), (3m - n)/(n + m), (10m - 2n)/(n + m))$]

3. Pre dané rôzne body A, B zostrojte pomocou pravítka a kružidla bod C tak, aby

a) $(ABC) = -2$

b) $(ABC) = -1/2$

c) $(ABC) = 2$

d) $(ABC) = 1/3$.

4. Načrtnite graf funkcie $y = (ABC)$, kde $C = A + x(B - A)$, $x \neq 1$.

[Hyperbola s rovnicou $y = 1 + 1/(x - 1)$]

5. Dokážte, že pre navzájom rôzne kolineárne body A, B, C platí

a) $(BAC) = 1/(ABC)$

b) $(ACB) = 1 - (ABC)$

c) $(CAB) = 1/[1 - (ABC)]$

d) $(CBA) = (ABC)/[(ABC) - 1]$

e) $(BCA) = [(ABC) - 1]/(ABC)$.

[Návod: Využite vyjadrenie deliaceho pomeru v súradniciach (veta 1a).]

6. Na priamke AB nájdite bod X , pre ktorý

a) $(ABX) = (BAX)$ [$S(A, B)$]

b) $(BAX) = (BXA)$ [$B + (B - A)$]

c) $(XBA)(BXA) = -1$. [neexistuje]

7. Dokážte, že pre navzájom rôzne kolineárne body A, B, C, D platí $(ABD)(BCD)(CAD) = 1$.

[Návod: Na priamke AB zaveďte afinnú sústavu súradníc.]

8. V A^3 sú dané priamky p, q a číslo $\lambda \neq 0, 1$. Určte množinu všetkých bodov X , pre ktoré $(ABX) = \lambda$, pričom $A \in p, B \in q$ sú ľubovoľné body, ak [Nech X_0 je jeden bod, pre ktorý $(A_0 B_0 X_0) = \lambda, A_0 \in \alpha, B_0 \in \beta$.]

a) priamky p, q sú rovnobežné a navzájom rôzne [Rovnobežka s priamkami p, q prechádzajúca bodom X_0]

b) priamky p, q sú mimobežné. [Rovina prechádzajúca bodom X_0 rovnobežne s p, q]

9. Z Cevovej vety odvodte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
10. Bod K rozdeľuje stranu AB trojuholníka ABC v pomere $k : 1$, bod L stranu BC v pomere $l : 1$ (t.j. $|AK| : |BK| = k$, $|BL| : |CL| = l$). P je priesečník priamok CK a AL , M priesečník priamok BP a AC . V akom pomere rozdeľuje bod M úsečku AC ? $[|MC| : |MA| = kl : 1]$
11. Dokážte Paschovu vetu: Ak priamka ležiaca v rovine trojuholníka neprechádza žiadnym vrcholom trojuholníka a pretína jednu jeho stranu, tak pretína práve jednu ďalšiu stranu trojuholníka. (Pod stranou trojuholníka sa rozumie úsečka.)

[Návod: Menelaova veta a geometrický význam znamienka deliaceho pomeru (dôsledok 13.1).]

12 LINEÁRNA KOMBINÁCIA BODOV

V tejto kapitole rozšírime počítanie s bodmi a vektormi v afinnom priestore o ďalšie operácie, ktoré v niektorých situáciách umožnia veľmi efektívne postupy.

12.1 LINEÁRNA KOMBINÁCIA BODOV

Lineárne kombinácie vektorov, ktoré poznáme z lineárnej algebry, preniesieme aj na body, hoci iba v obmedzenom rozsahu.

Definícia 12.1: V afinnom priestore zvolíme ľubovoľný bod P . *Lineárna kombinácia bodov* $c_1A_1 + \dots + c_kA_k$ je bod $c_1A_1 + \dots + c_kA_k = P + c_1(A_1 - P) + \dots + c_k(A_k - P)$, ak $c_1 + \dots + c_k = 1$, alebo vektor $c_1A_1 + \dots + c_kA_k = c_1(A_1 - P) + \dots + c_k(A_k - P)$, ak $c_1 + \dots + c_k = 0$.

Ak $a_1 + \dots + a_k \neq 1, 0$, lineárnu kombináciu $c_1A_1 + \dots + c_kA_k$ nedefinujeme. Nasledujúca veta bezprostredne vyplýva z definície 1 a zo základnej vety o súradniciach (veta 2.3).

Veta 12.1: Súradnice bodu resp. vektora, ktorý je lineárnou kombináciou bodov, sú lineárnymi kombináciami súradníc kombinovaných bodov s odpovedajúcimi koeficientmi. ☒

Veta 1 okrem iného hovorí, že súradnice lineárnej kombinácie bodov nie sú ovplyvnené súradnicami bodu P z definície 1. Takto dostávame

Dôsledok 12.1: Lineárna kombinácia bodov nezávisí od pomocného bodu P z definície 1. ☒

V dôsledku 1 vlastne tvrdíme, že ak $c_1 + \dots + c_k = 1$, tak pre všetky body P a Q platí

$$Q + c_1(A_1 - Q) + \dots + c_k(A_k - Q) = P + c_1(A_1 - P) + \dots + c_k(A_k - P)$$

a podobne pre prípad $c_1 + \dots + c_k = 0$. Použitú metódu dôkazu vlastností lineárnych kombinácií bodov prechodom k súradniciam zovšeobecníme v nasledujúcom princípe.

Princíp počítania s lineárnymi kombináciami bodov Výrok o bodoch, vektoroch a číslach a o operáciách rozdiel bodov, súčet bodu s vektorom, lineárna kombinácia bodov, súčet vektorov a skalárny násobok vektora je pravdivý, ak je korektne zapísaný, a ak je pravdivý výrok, ktorý z daného výroku vznikne nahradením všetkých bodov a vektorov reálnymi číslami.

Poznámka 12.1: Niekedy sa lineárna kombinácia bodov nazýva *afinná kombinácia bodov* alebo tiež *barycentrická kombinácia bodov*. Slovo „barycentrum“ znamená ťažisko. V mechanike sa ťažisko sústavy hmotných bodov $A_1, \dots, A_k$ s hmotnosťami $m_1, \dots, m_k$ definuje ako bod

$$c_1A_1 + \dots + c_kA_k \text{ pre } c_i = m_i/(m_1 + \dots + m_k), i = 1, \dots, k.$$

Príklad 12.1: Uvádžame niekoľko ukážok lineárnych kombinácií bodov. Prvé dve predstavujú jedine možné jednočlenné lineárne kombinácie bodov. Pre všetky body A, B, C a čísla t platí:

$$1A = A \tag{12.1}$$

$$0A = \mathbf{0} \tag{12.2}$$

$$1B + (-1)A = B - A \tag{12.3}$$

$$1B + 1C + (-1)A = B + (C - A) = C + (B - A) \tag{12.4}$$

$$(1 - t)A + tB = A + t(B - A) \tag{12.5}$$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = S(A, B) \tag{12.6} \quad \checkmark$$

Napriek tomu, že rovnosti (11.3) a (11.4) umožňujú redukovať operácie rozdiel bodov a súčet bodu s vektorom na lineárne kombinácie bodov, je účelné tieto operácie používať naďalej, napríklad kvôli prehľadnosti formúl.

Príklad 12.2: Na základe rovnosti (11.5) môžeme teraz preformulovať parametrické vyjadrenia priamky, úsečky a polpriamky prostredníctvom lineárnych kombinácií bodov:

$$\begin{aligned}\langle AB \rangle : X &= aA + bB, & a + b &= 1 \\ [AB] : X &= aA + bB, & a, b \geq 0, a + b &= 1 \\ (AB) : X &= aA + bB, & a, b > 0, a + b &= 1, \text{ pre } A \neq B \\ [AB] : X &= aA + bB, & b \geq 0, a + b &= 1 \\ (AB) : X &= aA + bB, & b > 0, a + b &= 1\end{aligned}$$

Vzhľadom na požiadavky kladené na súčet koeficientov, pre lineárne kombinácie bodov asociatívny zákon vo všeobecnosti neplatí. Čiastočne ho nahrádza nasledujúca redukcia k -člennej lineárnej kombinácie bodov na dvojčlennú a $(k-1)$ -člennú.

Lema 12.1 Nech $k \geq 3$, $c_1 + \dots + c_k = 1$ a $c_k \neq 1$. Potom

$$c_1 A_1 + \dots + c_k A_k = (1 - c_k)[c_1/(1 - c_k)A_1 + \dots + c_{k-1}/(1 - c_k)A_{k-1}] + c_k A_k.$$

Dôkaz: Lema vyplýva z princípu počítania s lineárnymi kombináciami bodov. ☒

12.2 BARYCENTRICKÉ SÚRADNICE

V úzkej súvislosti s lineárnymi kombináciami bodov definujeme v afinnom priestore ďalší typ súradníc.

Definícia 12.2: *Barycentrická sústava súradníc* v afinnom priestore A^n je usporiadaná $(n+1)$ -tica lineárne nezávislých bodov $(E_0, E_1, \dots, E_n)$. Tieto body sa nazývajú *súradnicové body* alebo aj *jednotkové body*. *Barycentrické súradnice bodu* resp. *vektora* je usporiadaná $(n+1)$ -tica čísiel tvorená koeficientmi vyjadrenia bodu resp. vektora ako lineárnej kombinácie súradnicových bodov, teda

$$\text{bod } X \text{ má barycentrické súradnice } (x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow X = x_0 E_0 + x_1 E_1 + \dots + x_n E_n \quad (12.7)$$

$$\text{vektor } \mathbf{x} \text{ má barycentrické súradnice } (x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathbf{x} = x_0 E_0 + x_1 E_1 + \dots + x_n E_n \quad (12.8)$$

Z definície barycentrických súradníc je zrejmé, že ich súčet sa pre bod rovná 1 a pre vektor 0.

Nasledujúca veta vyjadruje vzťah barycentrických súradníc k afinným súradniciam. Z nej vyplýva existencia a jednoznačnosť barycentrických súradníc bodu. Pre vektory odkazujeme na úlohu 8.

Veta 12.2: Bod X má vzhľadom na barycentrickú sústavu súradníc $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ barycentrické súradnice $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ práve vtedy, keď vzhľadom na afinnú sústavu súradníc $E_0, E_1 - E_0, \dots, E_n - E_0$ má afinné súradnice $(x_1, \dots, x_n)$ a $x_0 = 1 - x_1 - \dots - x_n$.

Dôkaz: Stačí prepísať lineárnu kombináciu $X = x_0 E_0 + x_1 E_1 + \dots + x_n E_n$ podľa definície 1 s pomocným bodom $P = E_0$ a využiť definíciu afinných súradníc bodu z rovnosti (2.6):

$$X = x_0 E_0 + x_1 E_1 + \dots + x_n E_n = E_0 + x_1(E_1 - E_0) + \dots + x_n(E_n - E_0) \quad \checkmark$$

Geometrický význam absolútnych hodnôt barycentrických súradníc bodu v priestore dimenzie 1, 2 a 3 neskôr dajú vety 4, 5 a úloha 10. Aby sme mohli geometricky interpretovať znamienka barycentrických súradníc, označíme symbolom π_i , $i = 0, 1, \dots, n$ nadrovinu určenú všetkými jednotkovými bodmi okrem bodu E_i , napr. $\pi_0 = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$, $\pi_1 = \langle E_0, E_2, \dots, E_n \rangle$.

Veta 12.3: Pre barycentrické súradnice $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ bodu X vzhľadom na barycentrickú sústavu súradníc $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ platí

- a) $x_i = 0 \Leftrightarrow X \in \pi_i$
- b) $x_i > 0 \Leftrightarrow X \in (\pi_i E_i)$

Dôkaz V afinnej sústave súradníc, ktorá podľa vety 2 odpovedá uvažovanej barycentrickej sústave súradníc, je nadrovina π_i pre $i \neq 0$ vyjadrená rovnicou $x_i = 0$ a polpriestor $(\pi_i E_i)$ nerovnicou $x_i > 0$, preto dokazovaná veta platí pre všetky $i \neq 0$.

Nadrovina π_0 je podľa vety 4.2 v afinných súradniciach vyjadrená rovnicou $x_1 + \dots + x_n - 1 = 0$. Bod E_0 má všetky afinné súradnice nulové, preto polpriestor $(\pi_0 E_0)$ je v afinných súradniciach vyjadrený nerovnicou $x_1 + \dots + x_n - 1 < 0$. Pre barycentrické súradnice platí $x_1 + \dots + x_n - 1 = -x_0$, preto v nich je nadrovina π_0 vyjadrená podmienkou $x_0 = 0$ a polpriestor $(\pi_0 E_0)$ podmienkou $x_0 > 0$. ☒

Dôsledok 12.2: $\Delta ABC = \{aA + bB + cC ; a + b + c = 1, a, b, c \geq 0\}$ ☒

12.3 GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA LINEÁRNEJ KOMBINÁCIE DVOCH A TROCH BODOV

Veta 12.4: Pre $A \neq B$ z rovnosti $X = aA + bB$ (pričom $a + b = 1$) vyplýva

$$|a| = |XB|/|AB|, |b| = |XA|/|AB|$$

Dôkaz Z rovnosti (11.5) vyplýva, že $aA + bB = B + a(A - B)$, preto $X - B = a(A - B)$. Odtiaľ $|X - B| = |a| |A - B|$, čiže $|a| = |XB|/|AB|$. Druhá rovnosť sa dokazuje analogicky. ☒

Dôsledok 12.3: Ak bod X leží medzi bodmi A, B , tak rovnosť $X = aA + bB$, $a + b = 1$ je ekvivalentná s rovnosťami

$$a = |XB|/|AB|, b = |XA|/|AB|,$$

resp. s rovnosťou

$$a|XA| = b|XB|,$$

resp. s jednou z rovností pomerov

$$|XA| : |XB| = b : a$$

$$|XA| : |XB| = 1/a : 1/b$$



Poznámka 12.2: V mechanike rovnosť $a|XA| = b|XB|$ vyjadruje rovnováhu páky s krajnými bodmi A, B , v ktorých sa nachádzajú záťaže s hmotnosťami a, b .

Veta 12.5: Pre nekolineárne body A, B, C z rovnosti $X = aA + bB + cC$ (pričom $a + b + c = 1$) vyplýva

$$|a| = S(\Delta XBC)/S(\Delta ABC), |b| = S(\Delta AXC)/S(\Delta ABC), |c| = S(\Delta ABX)/S(\Delta ABC).$$

Dôkaz: V rovine ABC zvolíme karteziánsku sústavu súradníc. Rovnosť $X = aA + bB + cC$ predstavuje v súradniciach sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme a, b, c . Pridáme k nim ešte rovnicu $a + b + c = 1$. Z tejto sústavy troch rovníc vyjadríme neznámu a Cramerovým pravidlom, zlomok rozšírime číslom $\frac{1}{2}$ a použijeme vetu 11.6b:

$$|a| = |\det(\vec{X}, \vec{B}, \vec{C})|/|\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})| = S(\Delta XBC)/S(\Delta ABC)$$

Pri koeficientoch b a c postupujeme rovnako. ☒

12.4 ÚLOHY

2. Napíšte súradnice bodu resp. vektora. a) b)

a) $5A + 8B - 12C$, ak $A = (2, 1, -5)$, $B = (3, -1, 4)$, $C = (1, 1, -1)$ [[22, -15, 19]]

b) $5A + 3B - 8C$, ak $A = (1, -2)$, $B = (3, 4)$, $C = (2, -1)$. [[11, -6, -5]]

3. Vyjadrite daný bod alebo vektor ako lineárnu kombináciu bodov A, B, C .

a) $A + 2(B - A) + 3(A - C)$ [2A + 2B - 3C]

b) $[A + 2(B - A)] - [B + 3(C - A)]$. [2A + B - 3C]

4. Vyjadrite bod P ako lineárnu kombináciu bodov $A = (2,1)$ a $B = (-1,2)$, ak

a) $P = (8,-1)$ [3A - 2B]

b) $P = (-7,4)$ [-2A + 3B]

c) $P = (4,7)$. [vyjadrenie neexistuje]

5.

a) Dokážte, že pre body A, B, C, D a čísla a, b, c, d , $a + b = c + d = 1$ platí

$$c(aA + bB) + d(aD + bC) = a(cA + dD) + b(cB + dC).$$

b) $+$ V E^3 je daná uzavretá lomená čiara $ABCD$ (nemusí ležať v rovine), ktorej protiľahlé strany sa nepretínajú. Na stranách AB, BC, CD, DA sú dané body K, L, M, N tak, že

$$|AK| : |KB| = |DM| : |MC| \text{ a } |BL| : |LC| = |AN| : |ND|.$$

Dokážte, že úsečky KM a LN sa pretínajú a určte, v akom pomere ich rozdeľuje spoločný bod.

[Spoločný bod P úsečiek KM a LN ich rozdeľuje v pomeroch $|KP| : |PM| = |BL| : |LC|$ a $|NP| : |PL| = |AK| : |KB|$.
Návod: Rovnosť $|AK| : |KB| = |DM| : |MC|$ znamená, že $K = aA + bB$ a $L = aD + bC$ pre vhodné čísla a, b , $a + b = 1$.]

6. Zapište v tvare lineárnej kombinácie obraz bodu X

a) v súmernosti so stredom S , [2S - X]

b) v rovnoľahlosti so stredom S a s koeficientom k . [(1 + k)S - kX]

7. Pre dané body A, B pomocou pravítka a kružidla zostrojte bod $X = aA + bB$.

a) $a = 0,2, b = 0,8$

b) $a = 1/3, b = 2/3$

c) $a = -1/3, b = 4/3$.

[Návod: Využite poslednú rovnosť z dôsledku 1.]

8. Pre dané body A, B, C pomocou pravítka a kružidla zostrojte bod $aA + bB + cC$.

a) $a = 0,2, b = 0,6, c = 0,2$

b) $a = 0, b = 0,6, c = 0,4$

c) $a = 1/6, b = 2/6, c = 3/6$

d) $a = 2, b = 3, c = -4$.

[Návod: Využite lemu 1 v podobe $aA + bB + cC = (a + b)[a/(a + b)A + b/(a + b)B] + cC$.
Pomocný bod $X' = a/(a + b)A + b/(a + b)B$ a výsledný bod $(a + b)X' + cC$ zostrojte ako v predchádzajúcej úlohe.]

9. Nájdite vzťahy medzi barycentrickými súradnicami vektora vzhľadom na barycentrickú sústavu súradníc $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ a afinnými súradnicami toho istého vektora vzhľadom na afinnú sústavu súradníc $E_0, E_1 - E_0, \dots, E_n - E_0$. [Ako vo vete 3, ibaže $x_0 = -x_1 - \dots - x_n$.]

10. Nájdite barycentrické súradnice bodu M a vektora u vzhľadom na barycentrickú sústavu súradníc s jednotkovými bodmi $E_0 = (1,2), E_1 = (2,3), E_2 = (-1,1)$, ak

a) $M = (-3,1)$ [(-4,2,3)]

b) $M = (2,2)$ [(3,-1,-1)]

c) $u = (-8,-5)$ [(-1,-2,3)]

d) $u = (4,1)$. [(5,-2,-3)]

11. Geometricky interpretujte absolútne hodnoty barycentrických súradníc v F^3 tak, aby vznikla analógia k vete 5. [Pomery objemov vhodných štvorstenov.]

12. ⁺ Daný je trojuholník ABC , $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dokážte

a) Pre stred S kružnice vpísanej do trojuholníka ABC platí

$$S = a/(a+b+c)A + b/(a+b+c)B + c/(a+b+c)C.$$

[Návod: a) Položme $S = \alpha A + \beta B + \gamma C$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Pomocou obsahov trojuholníkov ABS , BCS , CAS a ABC dokážte, že $\alpha : \beta : \gamma = 1/v_a : 1/v_b : 1/v_c = a : b : c$.]

b) Stred kružnice vpísanej do trojuholníka je jeho vnútorným bodom.

[Návod: Všimnite si znamienka barycentrických súradníc stredu kružnice vpísanej vzhľadom na barycentrickú sústavu súradníc určenú vrcholmi trojuholníka. Využite dôsledok 3.]

c) Stred kružnice pripísanej k strane BC je bod $-a/(-a+b+c)A + b/(-a+b+c)B + c/(-a+b+c)C$.

13. ^{*} Dokážte: [Návod: Zapište lineárnu kombináciu bodov $A_1, \dots, A_k$ podľa definície 1 s pomocným bodom $P = A_1$.]

a) Podpriestor určený bodmi $A_1, \dots, A_k$ je množina všetkých bodov, ktoré sú lineárnymi kombináciami bodov $A_1, \dots, A_k$.

b) Smer podpriestoru určeného bodmi $A_1, \dots, A_k$ je množina všetkých vektorov, ktoré sú lineárnymi kombináciami bodov $A_1, \dots, A_k$.

14. ⁺ Dokážte:

a) Body $A_1, \dots, A_k$, $k \geq 2$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď nulový vektor možno vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu s aspoň jedným nenulovým koeficientom.

b) Body $A_1, \dots, A_k$, $k \geq 2$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných.

15. ⁺ Dokážte, že pre ťažisko bodov $A_1, \dots, A_k$ platí $T(A_1, \dots, A_k) = 1/kA_1 + \dots + 1/kA_k$.

16. Casteljauov (čítaj kastelžuov) algoritmus vyčísl'ovania bodov Bézierovej kubiky. K riadiacim vrcholom A_0, A_1, A_2, A_3 Bézierovej kubiky definujeme rekurentne body A_i^j predpisom

$$A_i^0 = A_i, i=0,1,2,3; A_i^j = \frac{1}{2}A_i^{j-1} + \frac{1}{2}A_{i+1}^{j-1}, j = 1,2,3, i = 0, \dots, 3-j \quad (12.9)$$

a) Pomocou pravítka a kružidla zostrojte všetky body A_i^j .

b) Dokážte, že pre Bézierovu kubiku $P(t)$ s riadiacimi vrcholmi A_0, A_1, A_2, A_3 platí

$$P(\frac{1}{2}) = A_0^3$$

c) Pomocou pravítka a kružidla zostrojte bod $P(\frac{1}{2})$.

d) ⁺ Dokážte, že pre Bézierovu kubiku $Q(t)$ s riadiacimi vrcholmi $A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_3^0$ a pre Bézierovu kubiku $R(t)$ s riadiacimi vrcholmi $A_3^0, A_2^1, A_1^2, A_0^3$ platí

$$Q(t) = P(\frac{1}{2}t), \quad R(t) = P(\frac{1}{2}(1+t))$$

a interpretujte dokázané rovnosti.

e) ⁺ Pomocou pravítka a kružidla zostrojte body $P(\frac{1}{4}t)$ a $P(\frac{3}{4}t)$.

f) ⁺ Zovšeobecňujeme rekurentnú definíciu (11.11) tak, že namiesto čísla $\frac{1}{2}$ použijeme ľubovoľné $t \in \langle 0,1 \rangle$: $A_i^j = (1-t)A_i^{j-1} + tA_{i+1}^{j-1}$. Dokážte, že vtedy $P(t) = A_0^3$.

g) ⁺ Pomocou pravítka a kružidla zostrojte bod $P(t)$.

[Návod: Trpezlivo počítajte. d) Obidve časti Bézierovej krivky $P(t)$, na ktoré ju rozdeľuje bod $P(\frac{1}{2})$, sú opäť Bézierovými krivkami. g) Bod A_i^j rozdeľuje úsečku $A_i^{j-1}A_{i+1}^{j-1}$ v pomere $(1-t) : t$.]

17. ⁺ *Konvexná kombinácia bodov* je lineárna kombinácia s nezápornými koeficientmi. Dokážte: Konvexná množina obsahuje všetky konvexné kombinácie svojich bodov.

[Návod: Indukcia podľa počtu bodov lineárnej kombinácie a lema 1]

